15 個の実数 x_1, x_2, $\cdots$, x_{15} からなるデータがある．このデータの平均値を $\overline{x}$，標準偏差を s とする．

(1) $|x_i - \overline{x}| > 4s$ を満たす x_i は存在しないことを証明せよ．

(2) $|x_i - \overline{x}| > 2s$ を満たす x_i の個数は 3 以下であることを証明せよ．

(18 一橋大 後 経済 5-B)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) 背理法を用いる．

$|x_i - \overline{x}| > 4s$ を満たす x_i が存在すると仮定する．標準偏差の 2 乗である分散 s^2 は

$$s^2 = \frac{1}{15}\{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_{15} - \overline{x})^2\}$$

であり，すべての j に対して $(x_j - \overline{x})^2 \geqq 0$ が成り立つから

$$s^2 \geqq \frac{1}{15}(x_i - \overline{x})^2 > \frac{16s^2}{15} \quad (\because\ s \geqq 0)$$

これは不合理である．

よって，$|x_i - \overline{x}| > 4s$ を満たす x_i は存在しない． ……(証明終わり)

(2) 背理法を用いる．

$|x_i - \overline{x}| > 2s$ を満たす x_i が 4 個以上存在すると仮定する．$(x_i - \overline{x})^2 > 4s^2$ $(\because\ s \geqq 0)$ を満たす x_i が 4 個以上存在するから

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{15}\{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_{15} - \overline{x})^2\} \\ &\geqq \frac{1}{15}\{4 \cdot (4s^2)\} \\ &= \frac{16}{15}s^2 \end{aligned}$$

これは不合理である．

よって，$|x_i - \overline{x}| > 2s$ を満たす x_i の個数は 3 以下である． ……(証明終わり)