不等式 $3x^4-22x^2+7>0$ を満たす x の値の範囲を求めたい．そのため，$t=x^2$ とおき，$f(t)=3t^2-22t+7$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(t)=0$ となる t の値を求めよ．

(2) $f(t)>0$ となる t の値の範囲を求めよ．

(3) $3x^4-22x^2+7>0$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

(20 東北学院大学 工 6)

【答】

(1) $t=\dfrac{1}{3},\quad 7$

(2) $0\leqq t<\dfrac{1}{3},\quad 7<t$

(3) $x<-\sqrt{7},\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3},\quad \sqrt{7}<x$

【解答】

$t=x^2$ より，$t\geqq 0$ である．

(1)
$$\begin{aligned} f(t)&=3t^2-22t+7\\ &=(3t-1)(t-7)\end{aligned}$$

であるから，$f(t)=0$ となる t は

$$t=\frac{1}{3},\quad 7$$

であり，これらは $t\geqq 0$ を満たす．

$$\therefore\quad \boldsymbol{t=\frac{1}{3},\quad 7} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $y=f(t)$ $(t\geqq 0)$ のグラフより，$f(t>0)$ となる t の値の範囲は

$$\boldsymbol{0\leqq t<\frac{1}{3},\quad 7<t} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $3x^4-22x^2+7>0$ を満たす x の値の範囲は

$$(*)\begin{cases} t=x^2\\ 3t^2-22t+7>0\end{cases}$$

を満たす t が存在するような x の値の範囲である．(2) より

$$\begin{aligned}(*)\iff&\begin{cases} t=x^2\\ 0\leqq t<\dfrac{1}{3},\quad 7<t\end{cases}\\ \iff&\begin{cases} t=x^2\\ 0\leqq x^2<\dfrac{1}{3},\quad 7<x^2\end{cases}\end{aligned}$$

$x^2\geqq 0$ はつねに成り立つから，求めるものは

$$x^2<\frac{1}{3} \text{ または } 7<x^2$$

の解である．これは

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ または「} x < -\sqrt{7} \text{ または } \sqrt{7} < x \text{」}$$

よって，求める x の値の範囲は

$$\boldsymbol{x < -\sqrt{7}, \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sqrt{7} < x} \qquad \cdots\cdots\text{（答）}$$

である．