k を正の実数とする．座標平面上に直線 $\ell : y = kx + 1$ と放物線 $C : y = x^2$ がある．ℓ と C の交点のうち x 座標の小さい方を P，大きい方を Q とする．さらに，線分 PQ の垂直二等分線を m とし，m と C の交点のうち x 座標の小さい方を R，大きい方を S とする．

(1) 線分 PQ の中点 M の座標を k を用いて表せ．

(2) k が正の実数を動く とき，線分 RS の中点 N の y 座標が最小となる k の値を求めよ．また，そのときの P と Q の座標を求めよ．

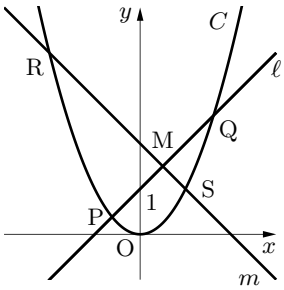
(20 北海道大 文 1)

【答】

(1) $\mathrm{M}\left(\dfrac{k}{2},\ \dfrac{k^2}{2}+1\right)$

(2) $k = 1$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

【解答】



(1) P，Q の x 座標をそれぞれ $p,\ q\ (p < q)$ とおくと，$p,\ q$ は

$$x^2 = kx + 1$$
$$\therefore\quad x^2 - kx - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の実数解である．

$$\text{判別式} : D_\ell = k^2 + 4 > 0$$

より，$p,\ q$ は異なる 2 つの実数解である．このとき，線分 PQ の中点 M の座標は

$$\left(\frac{p+q}{2},\ k\cdot\frac{p+q}{2}+1\right)$$

である．解と係数の関係より $p + q = k$ であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{M}\left(\frac{k}{2},\ \frac{k^2}{2}+1\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 線分 PQ の垂直二等分線 m は傾き $-\dfrac{1}{k}$ で，点 M を通るので，m を表す方程式は

$$y = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{k}{2}\right) + \frac{k^2}{2} + 1$$
$$\therefore\quad y = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2}{2} + \frac{3}{2}$$

である．R，S は m と C の交点であるから，R，S の x 座標をそれぞれ $r,\ s\ (r < s)$ とおくと，$r,\ s$ は

$$x^2 = -\frac{1}{k}x + \frac{k^2}{2} + \frac{3}{2}$$
$$\therefore\quad x^2 + \frac{1}{k}x - \frac{k^2}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

の実数解である．

$$\text{判別式}: D_m = \frac{1}{k^2} + 2(k^2+3) > 0$$

より，$r,\ s$ は異なる 2 つの実数解である．このとき，線分 RS の中点 N の座標は

$$\left(\frac{r+s}{2},\ -\frac{1}{k}\frac{r+s}{2} + \frac{k^2}{2} + \frac{3}{2}\right)$$

である．解と係数の関係より $r+s=-\dfrac{1}{k}$ であるから

$$\mathrm{N}\left(-\frac{1}{2k},\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2}+k^2+3\right)\right)$$

である．

次に，N の y 座標に着目する．k が正の実数を動くとき，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{1}{k^2} + k^2 \geqq 2\sqrt{\frac{1}{k^2}\cdot k^2} = 2$$

が成立し，等号は $\dfrac{1}{k^2} = k^2$ すなわち $k=1\ (>0)$ のときに限り成立する．

よって，N の y 座標が最小となる k の値は

$$\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．また，このとき ① は

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \therefore \quad x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

であり，$p<q$ より

$$p = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である．したがって，P と Q の座標 $\mathrm{P}(p,\ p+1)$，$\mathrm{Q}(q,\ q+1)$ は

$$\mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{1-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{3-\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right), \quad \mathbf{Q}\left(\frac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{3+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}\right) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．