

$(x-3)(x-5)(x-7)(x-9) - 9$ を因数分解しなさい.

(21 福島大 農 1(2))

【答】 $(x+6)^2(x^2-12x+26)$

【解答】

積の組合せを工夫すると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (x-3)(x-9) \times (x-5)(x-7) - 9 \\ &= (x^2-12x+27)(x^2-12x+35) - 9 \end{aligned}$$

$X = x^2 - 12x + 31$ とおくと

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (X-4)(X+4) - 9 \\ &= X^2 - 25 \\ &= (X+5)(X-5) \\ &= (x^2-12x+36)(x^2-12x+26) \\ &= (x+6)^2(x^2-12x+26) \end{aligned}$$

• $t = x - 6$ とおくと

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (t+3)(t+1)(t-1)(t-3) - 9 \\ &= (t+3)(t-3) \times (t+1)(t-1) - 9 \\ &= (t^2-9)(t^2-1) - 9 \\ &= t^4 - 10t^2 \\ &= t^2(t^2-10) \\ &= (x-6)^2\{(x-6)^2-10\} \\ &= (x-6)^2(x^2-12x+26) \end{aligned}$$

• $x^2 - 12x + 26$ のさらなる因数分解を考える.

$$x^2 - 12x + 26 = 0 \quad \therefore x = 6 \pm \sqrt{10}$$

であり

$$x^2 - 12x + 26 = (x - 6 + \sqrt{10})(x - 6 - \sqrt{10})$$

となる.

通常, 整数係数の多項式の因数分解は整数を係数とする範囲で行うから, 解答の形で止めてよいだろう. しかし, 整数は実数であるから, 実数を係数とする範囲で因数分解する. あるいは, できる限り因数分解すると考えて

$$(x+6)^2(x-6+\sqrt{10})(x-6-\sqrt{10})$$

としたものもあるのではないか. このような解答は少ないだろう. 整数の範囲での因数分解, 実数の範囲での因数分解どちらも正解とされただろうが, 解答者が悩まないように出題者は配慮 (一言, 考える範囲を付記) してもらいたい.