$t$ を実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $\left(x+\dfrac{t}{x}\right)^3$ を展開せよ．

(2) 2つの実数 $a$，$b$ に対して，$f(x)=x^3+ax+b$ とする．$x$ についての整式 $x^3 f\left(x+\dfrac{t}{x}\right)$ において $x^4$ の係数，$x^3$ の係数および $x^2$ の係数を求めよ．

(3) 3次方程式 $x^3+3x-1=0$ は正の実数解 $\alpha$ をただ1つもつ．$\alpha$ を求めよ．

(21 島根大 医・総合理工 1)

---

【答】

(1) $x^3+3xt+\dfrac{3t^2}{x}+\dfrac{t^3}{x^3}$

(2) $(x^4\text{の係数})=3t+a$，$(x^3\text{の係数})=b$，$(x^2\text{の係数})=3t^2+at$

(3) $\alpha=\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

---

【解答】

(1) 展開すると

$$\left(x+\frac{t}{x}\right)^3=x^3+3x^2\left(\frac{t}{x}\right)+3x\left(\frac{t}{x}\right)^2+\left(\frac{t}{x}\right)^3$$
$$=\boldsymbol{x^3+3xt+\frac{3t^2}{x}+\frac{t^3}{x^3}} \quad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $f(x)=x^3+ax+b$ のとき

$$f\left(x+\frac{t}{x}\right)=\left(x+\frac{t}{x}\right)^3+a\left(x+\frac{t}{x}\right)+b$$
$$=x^3+(3t+a)x+b+\frac{3t^2+at}{x}+\frac{t^3}{x^3} \quad (\because ①)$$

なので

$$x^3 f\left(x+\frac{t}{x}\right)=x^6+(3t+a)x^4+bx^3+(3t^2+at)x^2+t^3 \quad \cdots\cdots ②$$

となる．よって

$$\boldsymbol{(x^4\text{の係数})=3t+a,\quad (x^3\text{の係数})=b,\quad (x^2\text{の係数})=3t^2+at} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $a=3$，$b=-1$ とおくと

$$f(x)=x^3+3x-1$$

であり，② は

$$x^3 f\left(x+\frac{t}{x}\right)=x^6+(3t+3)x^4-x^3+(3t^2+3t)x^2+t^3$$
$$=x^6+3(t+1)x^4-x^3+3t(t+1)x^2+t^3$$

となる．さらに，$x^4$，$x^2$ の項が消えるように $t=-1$ とおくと

$$x^3 f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^6-x^3-1$$

となる．これより

$$x^3 f\left(x-\frac{1}{x}\right)=0 \iff x^6-x^3-1=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\therefore\quad x^3=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \qquad \cdots\cdots ③'$$

を得る．$x=0$ は ③ の解ではないから，③$'$ を満たす $x$ (虚数も含めて 6 個ある) は

$$f\left(x-\frac{1}{x}\right)=0$$

の解である．そのうち $x-\dfrac{1}{x}>0$ を満たす $x$ は

$$\frac{x^2-1}{x}>0 \iff x(x+1)(x-1)>0 \qquad \therefore\quad -1<x<0,\ 1<x$$

である．$\sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}>1$ であり，かつ $f(x)=0$ の正の実数解 $\alpha$ はただ 1 つであることから

$$\begin{aligned}\alpha&=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}\\&=\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}\\&=\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

- $-1<\sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}<0$ を満たすから，$\alpha$ として

  $$\alpha=\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}}$$

  としてもよい．変形を続けると

  $$\begin{aligned}\alpha&=\sqrt[3]{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[3]{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}\\&=-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{-2}}\\&=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\end{aligned}$$

  となり，解答の $\alpha$ と一致する．
- $f(x)=x^3+3x-1$ では $f'(x)=3x^2+3>0$ より，$f(x)$ は単調増加であり，$f(x)=0$ となる実数解はただ 1 つである．
- $x^3+3x-1=0$ をカルダノの解法を用いて解いてみる．
  因数分解の公式

  $$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

  をさらに複素数の範囲まで広げて因数分解する．

  $$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

  $$\therefore\quad a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2=0$$

を $a$ について解くと

$$\begin{aligned}
a &= \frac{b+c\pm\sqrt{(b+c)^2-4(b^2-bc+c^2)}}{2}\\
&= \frac{b+c\pm\sqrt{-3b^2+6bc-3c^2}}{2}\\
&= \frac{b+c\pm\sqrt{3}(b-c)i}{2}\\
&= b\frac{1-\sqrt{3}i}{2}+c\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ b\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+c\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\\
&= -(b\omega+c\overline{\omega}),\ -(b\overline{\omega}+c\omega) \quad \left(\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\text{とした}\right)
\end{aligned}$$

より

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\omega+c\overline{\omega})(a+b\overline{\omega}+c\omega) \qquad \cdots\cdots ㋐$$

となる．ここで

$$x^3+3x-1=x^3+u^3+v^3-3uv\cdot x \qquad \cdots\cdots ㋑$$

すなわち

$$\begin{cases} u^3+v^3=-1\\ uv=-1 \end{cases}$$

を満たす $u,\ v$ を求める．

$$\begin{cases} u^3+v^3=-1\\ u^3v^3=-1 \quad (\text{必要条件}) \end{cases}$$

であり，$u^3,\ v^3$ は $t^2+t-1=0$ の解である．

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$u=-\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}},\ v=\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ とおくと

$$uv=\left(-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)=-\sqrt[3]{\frac{5-1}{4}}=-1$$

であり，十分である．$a=x,\ b=u,\ c=v$ とおくと，㋑，㋐ より

$$x^3+3x-1=(x+u+v)\,(x+u\omega+v\overline{\omega})(x+u\overline{\omega}+v\omega)$$

であり，$x^3+3x-1=0$ の解は

$$x=-(u+v),\ -(u\omega+v\overline{\omega}),\ -(u\overline{\omega}+v\omega)$$

すなわち，ただ 1 つの実数解は

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

であり，残りは 2 つの異なる虚数解

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\omega-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\overline{\omega},\ \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\overline{\omega}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\omega$$

である．