四次方程式

$$x^4+11x^3+31x^2+11x+1=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

について考える．$x=0$ は解ではないので，解 x に対して $y=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと等式

$$y^2+\boxed{\text{アイ}}\,y+\boxed{\text{ウエ}}=0$$

が成立する．四次方程式 $(*)$ の四つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ とすると

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\boxed{\text{オカキ}}$$

であり

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=\boxed{\text{クケ}}$$

であり

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=\boxed{\text{コサシス}}$$

である．　(21 東京医大 4)

【答】

アイ	ウエ	オカキ	クケ	コサシス
11	29	-11	59	-341

【解答】

$$x^4+11x^3+31x^2+11x+1=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

$x \neq 0$ より

$$(*) \iff x^2+11x+31+\frac{11}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+31=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+11\left(x+\frac{1}{x}\right)+29=0$$

$y=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$\boldsymbol{y^2+11y+29=0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

が成立する．解くと

$$y=\frac{-11\pm\sqrt{5}}{2}$$

であり

$$(*) \iff \left(x+\frac{1}{x}-\frac{-11+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1}{x}-\frac{-11-\sqrt{5}}{2}\right)=0$$

$$\iff \left(x^2+\frac{11-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{11+\sqrt{5}}{2}x+1\right)=0$$

となる．$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}$，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$ は対称式なので，四次方程式 $(*)$ の解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ について

$\alpha,\ \beta$ は $x^2+\dfrac{11-\sqrt{5}}{2}x+1=0$ の 2 解,

$\gamma,\ \delta$ は $x^2+\dfrac{11+\sqrt{5}}{2}x+1=0$ の 2 解

としてよい．このとき，解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{-11+\sqrt{5}}{2}\\ \alpha\beta=1\end{cases}\quad \text{かつ}\quad \begin{cases}\gamma+\delta=\dfrac{-11-\sqrt{5}}{2}\\ \gamma\delta=1\end{cases}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\\ =&\ \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-11+\sqrt{5}}{2}+\frac{-11-\sqrt{5}}{2}=\mathbf{-11}\end{aligned}$$ ……(答)

$$\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\\ =&\ (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\ =&\ \left(\frac{-11+\sqrt{5}}{2}\right)^2-2+\left(\frac{-11-\sqrt{5}}{2}\right)^2-2=\frac{121+5}{2}-4=\mathbf{59}\end{aligned}$$ ……(答)

$$\begin{aligned}&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3\\ =&\ (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)\\ =&\ \left(\frac{-11+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\frac{3(-11+\sqrt{5})}{2}+\left(\frac{-11-\sqrt{5}}{2}\right)^3-\frac{3(-11-\sqrt{5})}{2}\\ =&\ \frac{-11^3-3\cdot 11\cdot 5}{4}+33=\frac{-1331-165}{4}+33=\mathbf{-341}\end{aligned}$$ ……(答)

である．