次の問に答えよ．

(1) 整数 m に対して，m^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ．

(2) 自然数 $n,\ k$ が

$$25 \times 3^n = k^2 + 176 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を満たすとき，n は偶数であることを示せ．

(3) (2) の関係式 $(*)$ を満たす自然数の組 $(n,\ k)$ をすべて求めよ．

(21 北海道大 後 理・工 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $(4,\ 43)$，$(2,\ 7)$

【解答】

(1) 4 を法とする合同式を用いると

$$\begin{aligned}&0^2 \equiv 0,\\&(\pm 1)^2 \equiv 1,\\&2^2 \equiv 0\end{aligned}$$

であるから，整数 m に対して，m^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である．

……(証明終わり)

- m を偶数，奇数で場合分けしてもよい．

  $m = 2M$ のとき，$m^2 = 4M^2 = (4\text{ の倍数})$

  $m = 2M + 1$ のとき，$m^2 = 4M(M+1) + 1 = (4\text{ の倍数}) + 1$

  であるから，整数 m に対して，m^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である．

(2) 自然数 $n,\ k$ が

$$25 \times 3^n = k^2 + 176 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を満たすとき，n は偶数であることを背理法で示す．

n が奇数 $n = 2l + 1$ (l は 0 以上の整数) と仮定し，4 を法とする合同式を用いる．

$$\begin{aligned}((*)\text{ の左辺}) &= 25 \cdot 3^{2l+1}\\&= 25 \cdot 9^l \cdot 3\\&\equiv 1 \cdot 1^l \cdot 3\\&= 3\end{aligned}$$

また，(1) と $176 = 4^2 \cdot 11 \equiv 0$ であることから

$$\begin{aligned}((*)\text{ の右辺}) &\equiv 0 + 0 \text{ または } 1 + 0\\&\equiv 0 \text{ または } 1\end{aligned}$$

$3 \equiv (0\text{ または }1)$ は不合理であり，n は偶数である． ……(証明終わり)

- $(*)$ の左辺は奇数であるから，右辺も奇数であり，176 は偶数なので，k^2 すなわち k は奇数である．以後，4 を法とする合同式を用いる．
  (1) より，k が奇数のとき，$k^2 \equiv 1$ である．さらに，$176 = 4^2 \cdot 11$ であるから
  $$((*)\text{ の右辺}) \equiv 1 + 0 \equiv 1$$
  である．
  一方，$25 \equiv 1$，また，$3^{n+2} = 9 \cdot 3^n \equiv 3^n$ であるから，3^n を 4 で割った余りは 2 を周期とする．
  $$((*)\text{ の左辺}) \equiv 1 \cdot 3^n = 3^n \equiv \begin{cases} 3 & (n : \text{奇数}) \\ 1 & (n : \text{偶数}) \end{cases}$$
  よって，$(*)$ が成り立つのは n が偶数のときである．

(3) (2) より，$(*)$ を満たす n は偶数であるから，l を適当な自然数として，$n = 2l$ とおくことができる．このとき
$$\begin{aligned} (*) &\iff 25 \cdot 3^{2l} = k^2 + 176 \\ &\iff 5^2 \cdot (3^l)^2 - k^2 = 176 \\ &\iff (5 \cdot 3^l + k)(5 \cdot 3^l - k) = 2^4 \cdot 11 \end{aligned}$$
が成り立つ．l，k が自然数より $5 \cdot 3^l + k > 5 \cdot 3^l - k$ であり
$$(5 \cdot 3^t + k) - (5 \cdot 3^l - k) = 2k = (\text{偶数})$$
であることより，$5 \cdot 3^l + k$ と $5 \cdot 3^1 - k$ の偶奇は一致する．したがって
$$\begin{aligned} &\left(5 \cdot 3^l + k,\ 5 \cdot 3^l - k\right) = (88,\ 2),\ (44,\ 4),\ (22,\ 8) \\ \therefore\quad &\left(5 \cdot 3^l,\ k\right) = (45,\ 43),\ (24,\ 20),\ (15,\ 7) \end{aligned}$$
$5 \cdot 3^l = 24$ となる自然数 l は存在しないから
$$(l,\ k) = (2,\ 43),\ (1,\ 7)$$
と定まる．
　よって，求める自然数の組 $(n,\ k)$ は

(4，43)，(2，7)　　　　……（答）

の 2 組がすべてである．