k を実数の定数，i を虚数単位とする．x の 3 次方程式

$$x^3+(2+k+i)x^2+(2k+1+i)x+2+ki=0$$

が実数解をもつとき，

$$k=-\boxed{\text{テ}}$$

である．このときの実数解は小さい順に

$$x=-\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}}$$

である．

(21 中京大 文系 8)

【答】

テ	ト	ナ
2	2	1

【解答】

$$x^3+(2+k+i)x^2+(2k+1+i)x+2+ki=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

i について整理すると

$$x^3+(2+k)x^2+(2k+1)x+2+i(x^2+x+k)=0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

①′ を満たす実数 x が存在するから，その実数 x について

$$\begin{cases} x^3+(2+k)x^2+(2k+1)x+2=0 & \cdots\cdots ② \\ x^2+x+k=0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

が成り立つ．②より

$$x^3+2x^2+x+2+kx(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2+1)+kx(x+2)=0$$
$$(x+2)(x^2+kx+1)=0$$

である．

(i) $x+2=0$ のとき

$x=-2$ であり，このとき③より

$$k=-(-2)^2-(-2)=-2$$

である．よって

$$①' \iff x^3-3x+2+(x^2+x-2)i=0$$
$$\therefore\quad (x+2)(x-1)^2+(x+2)(x-1)i=0$$
$$\therefore\quad (x+2)(x-1)(x-1+i)=0$$

であるから，①の実数解は $x=-2,\ 1$ である．

(ii) $x^2+kx+1=0$ のとき

$x^2+kx+1=0$ かつ③より，k を消去すると

$$x^2+(-x^2-x)x+1=0$$
$$x^3-1=0$$
$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

実数解 x は $x=1$ であり，このとき③より

$$k=-1^2-1=-2$$

である．以後，(i) と同様である．

以上 (i)，(ii) より

$$\boldsymbol{k = -2}$$ ……(答)

であり，① の実数解は小さい順に

$$\boldsymbol{x = -2,\ 1}$$ ……(答)

である．