群数列

1 から始まる自然数の列を，以下のように群に分ける．

$$\underset{\text{第 1 群}}{1} \;\Big|\; \underset{\text{第 2 群}}{2,\ 3} \;\Big|\; \underset{\text{第 3 群}}{4,\ 5,\ 6,\ 7} \;\Big|\; 8,\ \cdots$$

ただし，第 n 群 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ には，2^{n-1} 個の自然数が入るものとする．
さらに，第 n 群の最初の自然数を a_n で表す．以下の問いに答えよ．

(1) 第 6 群の最後の自然数を求めよ．
(2) a_8 を求めよ．
(3) a_n を求めよ．
(4) 第 n 群に含まれるすべての自然数の和 T_n を求めよ．
(5) $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log_2 a_k}$ を求めよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(21 豊橋技科大 1)

【答】
(1) 63
(2) $a_8 = 128$
(3) $a_n = 2^{n-1}$
(4) $T_n = 2^{n-2}(3 \cdot 2^{n-1} - 1)$
(5) $S_n = \dfrac{n-1}{n}$

【解答】
(1) 第 6 群の最後の自然数は，第 1 群から第 6 群の末項までの項数に等しいから

$$\sum_{n=1}^{6} 2^{n-1} = \frac{1 \cdot (2^6 - 1)}{2-1} = 2^6 - 1 = \mathbf{63} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．
(2) a_8 は第 8 群の最初の自然数であるから

$$\begin{aligned} a_8 &= (\text{第 7 群の末項}) + 1 \\ &= \sum_{n=1}^{7} 2^{n-1} + 1 = \frac{1 \cdot (2^7 - 1)}{2-1} + 1 = 2^7 = \mathbf{128} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．
(3) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= (\text{第 } n-1 \text{ 群の末項}) + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} + 1 = \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2-1} + 1 = 2^{n-1} \end{aligned}$$

である．これは $n=1$ のときも成り立つ．よって

$$a_n = \mathbf{2^{n-1}} \ (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 第 n 群に含まれる自然数は初項 a_n，公差 1 の等差数列であるから，末項が $a_{n+1}-1$，項数が 2^{n-1} であることに注意すると，求める和 T_n は

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{2^{n-1}\{a_n+(a_{n+1}-1)\}}{2} \\ &= \frac{2^{n-1}(2^{n-1}+2^n-1)}{2} \\ &= \boldsymbol{2^{n-2}(3\cdot 2^{n-1}-1)} \end{aligned}$$ ……(答)

である．

(5) $\log_2 a_k = \log_2 2^{k-1} = k-1$ なので，$b \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log_2 a_k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n} \\ &= \boldsymbol{\frac{n-1}{n}} \end{aligned}$$ ……(答)

である．