θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，平面上の点 P と点 Q を

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\{1-\cos\theta-\sqrt{3}(\tan\theta-\sin\theta)\},\ \frac{1}{2}\{\sqrt{3}(1-\cos\theta)+\tan\theta-\sin\theta\}\right)$$
$$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}\{1+\cos\theta-\sqrt{3}(\tan\theta+\sin\theta)\},\ \frac{1}{2}\{\sqrt{3}(1+\cos\theta)+\tan\theta+\sin\theta\}\right)$$

で定める．M を線分 PQ の中点とし，O を原点 (0, 0) とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を求めよ．
(2) 3 点 O，P，Q は同一直線上にあることを示せ．
(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$ となるような θ の値を求めよ．

(21 北海道大 後 理・工 2)

【答】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\\ \sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\tan\theta\\ \sqrt{3}+\tan\theta\end{pmatrix}$
(2) 略
(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\cos\theta-\sqrt{3}(\tan\theta-\sin\theta)\\ \sqrt{3}(1-\cos\theta)+\tan\theta-\sin\theta\end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos\theta-\sqrt{3}(\tan\theta+\sin\theta)\\ \sqrt{3}(1+\cos\theta)+\tan\theta+\sin\theta\end{pmatrix}$$

(1) 与えられた条件より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\\ \sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\end{pmatrix}}\qquad\cdots\cdots ①\qquad\cdots\cdots(答)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}\tan\theta\\ \sqrt{3}+\tan\theta\end{pmatrix}}\qquad\cdots\cdots ②\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ② より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta\\ \sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta\end{pmatrix}\qquad\cdots\cdots ③$$

①，③ より

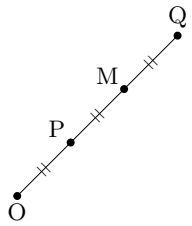
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\cos\theta(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$$
$$(1+\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

となるから，3 点 O，P，Q は同一直線上にある．　　……(証明終わり)

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0 < \dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} < 1$ より，3 点 O，P，Q はこの順に並ぶ．さらに，M は線分 PQ の中点であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PM}}|$ を満たす 4 点 O，P，Q，M は右図のように並ぶ．



よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であり

$$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1}{3}$$

$$3 - 3\cos\theta = 1 + \cos\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$$ ……(答)

である．