(1) $5^4 = 625$ を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい．このことを用いると，不定方程式

$$5^4x - 2^4y = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{\text{ア}}, \quad y = \boxed{\text{イウ}}$$

であることがわかる．

また，① の整数解のうち，x が 2 桁の正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{\text{エオ}}, \quad y = \boxed{\text{カキク}}$$

である．

(2) 次に，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りについて考えてみよう．

まず

$$625^2 = 5^{\boxed{\text{ケ}}}$$

であり，また，$m = \boxed{\text{イウ}}$ とすると

$$625^2 = 2^{\boxed{\text{ケ}}}m^2 + 2^{\boxed{\text{コ}}}m + 1$$

である．これらより，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りがわかる．

(3) (2) の考察は，不定方程式

$$5^5x - 2^5y = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

の整数解を調べるために利用できる．

x, y を ② の整数解とする．5^5x は 5^5 の倍数であり，2^5 で割ったときの余りは 1 となる．よって，(2) により，$5^5x - 625^2$ は 5^5 でも 2^5 でも割り切れる．5^5 と 2^5 は互いに素なので，$5^5x - 625^2$ は $5^5 \cdot 2^5$ の倍数である．

このことから，② の整数解のうち，x が 3 桁の正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{\text{サシス}}, \quad y = \boxed{\text{セソタチツ}}$$

であることがわかる．

(4) 11^4 を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい．不定方程式

$$11^5x - 2^5y = 1$$

の整数解のうち，x が正の整数で最小になるのは

$$x = \boxed{\text{テト}}, \quad y = \boxed{\text{ナニヌネノ}}$$

である．

(22 共通テスト 第 1 日程 IA 4)

【答】

ア	イウ	エオ	カキク	ケ	コ	サシス	セソタチツ	テト	ナニヌネノ
1	39	17	664	8	5	125	12207	19	95624

【解答】

(1) $$5^4x - 2^4y = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

$5^4 = 625$ を 2^4 で割ると

$$5^4 = 2^4 \cdot 39 + 1$$
$$\therefore\quad 5^4 \cdot 1 - 2^4 \cdot 39 = 1 \qquad \cdots\cdots ①'$$

1 は正の最小整数であるから，x が正の整数で最小になるときの x, y の値は

$$x = \mathbf{1},\quad y = \mathbf{39} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

① − ①′ より

$$5^4(x-1) - 2^4(y-39) = 0$$
$$\therefore\quad 5^4(x-1) = 2^4(y-39)$$

5^4 と 2^4 は互いに素であるから，整数 k を用いて

$$x - 1 = 2^4k \qquad \therefore\quad x = 1 + 2^4k$$

と表すことができ，このとき

$$5^4 \cdot 2^4k = 2^4(y-39) \qquad \therefore\quad y = 39 + 5^4k$$

である．x が 2 桁の正の整数で最小となるのは $k = 1$ のときであり

$$x = 1 + 16 = \mathbf{17},\quad y = 39 + 625 = \mathbf{664} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) まず

$$625^2 = (5^4)^2 = 5^{\mathbf{8}} = 5^5 \cdot 5^3 \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，$m = 39$ とすると

$$\begin{aligned} 625^2 &= (5^4)^2 = (2^4m+1)^2 \quad (\because\ ①') \\ &= (2^4m)^2 + 2\cdot(2^4m) + 1 \\ &= 2^8m^2 + 2^{\mathbf{5}}m + 1 \qquad \cdots\cdots(答) \\ &= 2^5(2^3m^2 + m) + 1 \qquad \cdots\cdots ①'' \end{aligned}$$

これらより，625^2 を 5^5 で割ったときの余りは 0，2^5 で割ったときの余りは 1 とわかる．

(3) $$5^5x - 2^5y = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

まず，x は整数であるから，5^5x は 5^5 の倍数であり，② を満たす整数 x, y は，$5^5x = 2^5y + 1$ を満たすから，5^5x を 2^5 で割った余りは 1 である．

また，$5^5x - 625^2$ は

$$5^5x - 625^2 = 5^5x - 5^8 = 5^5(x - 5^3)$$

であるから，5^5 で割り切れ，さらに，①″ において $M = 2^3m^2 + m$ とおくと

$$\begin{aligned} 5^5x - 625^2 &= (2^5y+1) - (2^5M+1) \quad (\because\ ②) \\ &= 2^5(y - M) \end{aligned}$$

であるから，2^5 で割り切れる．5^5 と 2^5 は互いに素なので，5^5x-625^2 は $5^5\cdot 2^5$ の倍数である．すなわち，整数 l を用いて

$$5^5x-625^2=5^5\cdot 2^5\cdot l \qquad \therefore\quad x=5^3+2^5\cdot l$$

と表すことができる．x が 3 桁の正の整数で最小となるのは $l=0$ のときであり

$$x=5^3=\mathbf{125}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$y=\frac{5^5\cdot 5^3-1}{2^5} \quad (\because\ ②)$$

$$=\frac{625^2-1}{2^5}=\frac{624\cdot 626}{2^5}=\frac{2^4\cdot 39\times 2\cdot 313}{2^5}=\mathbf{12207} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- (1) と同じようにして，一般解を求めて解くこともできる．(2) より

$$625^2=5^5\cdot 5^3$$

$$625^2=2^5M+1 \quad (①''\text{において } M=2^3m^2+m \text{ とおいた})$$

2 式を引くと

$$0=5^5\cdot 5^3-2^5M-1$$

$$\therefore\quad 5^5\cdot 5^3-2^5M=1 \qquad \cdots\cdots\ ②'$$

$② - ②'$ より

$$5^5(x-5^3)-2^5(y-M)=0$$

$$\therefore\quad 5^5(x-5^3)=2^5(y-M)$$

5^5 と 2^5 は互いに素であるから，整数 l を用いて

$$x-5^3=2^5l \qquad \therefore\quad x=5^3+2^5l$$

と表すことができ，このとき

$$5^5\cdot 2^5l=2^5(y-M) \qquad \therefore\quad y=M+5^5l$$

として一般解が求まった．以下解答と同じ．

(4) $$11^5x-2^5y=1 \qquad \cdots\cdots\ ③$$

まず，x は整数であるから，11^5x は 11^5 の倍数であり，③ を満たす整数 x, y は，$11^5x=2^5y+1$ を満たすから，11^5x を 2^5 で割った余りは 1 である．

また，$11^4=14641$ を $2^4=16$ で割ると

$$11^4=2^4\cdot 915+1$$

であり，$14641^2=(11^4)^2=11^8$ は 11^5 の倍数であり，2^5 で割った余りは 1 である．したがって，$11^5x-14641^2$ は 11^5 で割り切れ，2^5 で割り切れる．11^5 と 2^5 は互いに素なので，$11^5x-14641^2$ は $11^5\cdot 2^5$ の倍数である．すなわち，整数 n を用いて

$$11^5x-14641^2=11^5\cdot 2^5n \qquad \therefore\quad x=11^3+2^5n$$

と表すことができる．x が正の整数で最小になるのは，n が $11^3+2^5n>0$ を満たす最小の整数のときであり

$$n>-\frac{11^3}{2^5}=-\frac{1331}{32}=-41.5\cdots$$

より，$n=-41$ のときである．このとき

$$x=11^3+2^5\cdot(-41)=1331-1312=\mathbf{19}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$y=\frac{11^5\cdot 19-1}{2^5}=\frac{161051\cdot 19-1}{2^5}=\frac{3059968}{2^5}=\mathbf{95624} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 11^3 の 2^5 による割り算は右のようになる．これは

$$11^3 = 2^5 \cdot 41 + 19$$

$$\therefore \quad 11^3 + 2^5 \cdot (-41) = 19$$

であり，x が正の整数で最小となる n の値とそのときの x の値を示している．

$$\begin{array}{r} 41 \\ 32\,\overline{)\,1331} \\ \underline{128} \\ 51 \\ \underline{32} \\ 19 \end{array}$$