実数 t の関数

$$F(t)=\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx$$

について考える．

(1) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$F(t)$ を t の整式として表せ．
(2) $t \geqq 0$ のとき，$F(t)$ を最小にする t の値 T と $F(T)$ の値を求めよ．

(22 東北大 文系 2)

【答】

(1) $F(t)=\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}$
(2) $T=\dfrac{1}{2}$ のとき，$F\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$

【解答】

$$F(t)=\int_0^1 |x^2-t^2|\,dx=\int_0^1 |(x+t)(x-t)|\,dx$$

(1) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$F(t)=\int_0^1 (x+t)|x-t|\,dx$$

t は積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 内にあるから

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^t (t^2-x^2)\,dx+\int_t^1 (x^2-t^2)\,dx\\&=\left[t^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^t+\left[\frac{x^3}{3}-t^2x\right]_t^1\\&=2\left(t^3-\frac{t^3}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-t^2\right)\\&=\boldsymbol{\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．
(2) $t \geqq 0$ のとき，t が積分区間に $0 \leqq x \leqq 1$ にあるか否かで場合分けする．
$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，(1) より

$$F(x)=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$$

であり，$0<x<1$ のとき

$$F'(t)=4t^2-2t=2t(2t-1)$$

である．
$t \geqq 1$ のとき

$$F(t)=\int_0^1 (t^2-x^2)\,dx=\left[t^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=t^2-\frac{1}{3}$$

であり，単調増加である．

よって，$t \geqq 0$ における $F(t)$ の増減は下の通りである．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$F(t)$		$\searrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

よって，$F(t)$ は

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}} \text{ **のとき，最小値** } \boldsymbol{F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}}$$ ……(答)

をとる．