次の $\boxed{}$ にあてはまる数値を答えよ．

座標平面上に，3 点 O(0, 0)，A(1, 3)，B(4, 0) をとり，線分 AB を 2 : 1 に内分する点を P，線分 AB を 7 : 4 に外分する点を Q とする．このとき，次のことがいえる．

(1) 点 P の座標は $\left(\boxed{ア}, \boxed{イ}\right)$，Q の座標は $\left(\boxed{ウ}, -\boxed{エ}\right)$ である．

(2) 3 点 O，P，Q を通る円 C の方程式を求めよう．線分 OP の垂直二等分線の方程式は

$$y = -\boxed{オ}x + \boxed{カ} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

線分 PQ の垂直二等分線の方程式は

$$y = x - \boxed{キ} \qquad \cdots\cdots ②$$

である．

①，②より，円 C の方程式は

$$\left(x - \boxed{ク}\right)^2 + \left(y + \boxed{ケ}\right)^2 = \boxed{コサ}$$

である．

(3) 直線 $3x + 5y - 23 = 0$ に関して円 C と対称な円の方程式は

$$\left(x - \boxed{シ}\right)^2 + \left(y - \boxed{ス}\right)^2 = \boxed{コサ}$$

である．

(22 神戸学院大 文系・薬 2)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コサ	シ	ス
3	1	8	4	3	5	7	3	4	25	9	6

【解答】

(1) O(0, 0)，A(1, 3)，B(4, 0) であり，P は線分 AB を 2 : 1 に内分する点であるから，P の座標は

$$\left(\frac{1\cdot 1 + 2\cdot 4}{2+1}, \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 0}{2+1}\right) \text{ すなわち } \mathbf{(3,\ 1)}, \qquad \cdots\cdots(答)$$

Q は線分 AB を 7 : 4 に外分する点であるから，Q の座標は

$$\left(\frac{-4\cdot 1 + 7\cdot 4}{7-4}, \frac{-4\cdot 3 + 7\cdot 0}{7-4}\right) \text{ すなわち } \mathbf{(8,\ -4)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 線分 OP の垂直二等分線の方程式は

$$x^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2$$
$$-6x - 2y + 10 = 0$$

すなわち

$$y = -\mathbf{3}x + \mathbf{5} \qquad \cdots\cdots ① \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．線分 PQ の垂直二等分線の方程式は

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (x-8)^2 + (y+4)^2$$
$$-6x - 2y + 10 = -16x + 8y + 80$$

すなわち

$$y = x - \mathbf{7} \qquad \cdots\cdots ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

①，② の交点を D とすると，①，② を連立することにより，点 D の座標

$$\mathrm{D}(3,\ -4)$$

を得る．3 点 O，P，Q を通る円 C は D を中心とする半径が $\mathrm{OD} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ の円であるから，この方程式は

$$(x - \mathbf{3})^2 + (y + \mathbf{4})^2 = \mathbf{25} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 直線 $3x + 5y - 23 = 0$ を l，点 D の l に関する対称点を E とすると

「$\mathrm{DE} \perp l$」かつ「DE の中点は l 上にある」

が成り立つ．点 E の座標を $(\alpha,\ \beta)$ とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{\beta+4}{\alpha-3} \cdot \left(-\dfrac{3}{5}\right) = -1 \\ 3 \cdot \dfrac{\alpha+3}{2} + 5 \cdot \dfrac{\beta-4}{2} - 23 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(\beta+4) = 5(\alpha-3) \\ 3\alpha + 5\beta = 57 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\alpha - 3\beta = 27 \\ 3\alpha + 5\beta = 57 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \alpha = 9,\ \beta = 6$$

求める円は E を中心とする半径 5 の円であり，方程式は

$$(x - \mathbf{9})^2 + (y - \mathbf{6})^2 = 25 \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．