問題

式の計算・展開

1 次の各問いに答えよ。

(1) x についての整式 A，B が

$$2A+B=4x^3+7x^2+4x-1,\quad A-B=-x^3-4x^2+5x+1$$

をみたすとき，2 つの整式 A，B を求めよ。（福井工業大）

(2) 式 $5xy^2\times(-2x^2y)^2$ を計算せよ。（愛知工科大）

(3) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)(1+2x+3x^2)$ を展開したとき，定数項と x の係数を求めよ。（千葉商科大）

(4) 次の式を展開せよ。

(i) $(x+1)^2(x-1)^2$（久留米工業大）

(ii) $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)$（函館大）

(iii) $(x-2y+3z)^2$（獨協大）

チェック・チェック

式の計算・展開

1 整式を展開するということは，**同類項をまとめ，降べき（または昇べき）の順に整理**して並べることです。

(1) 整式の加法・減法についての確認です。

(2) 単項式の整理です。次の性質を使います（指数法則）。

$$x^m x^n=x^{m+n},\ (x^m)^n=x^{mn}$$

（m，n は数学 I では正の整数ですが，数学IIでは，実数の範囲まで広がります。）

(3) ていねいに展開してもよいのですが，求めるのは定数項と x の係数だけです。これらだけを拾い集めてもよいでしょう。

(4) (i) 2 次式の展開公式

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2\quad\text{（複号同順）}$$

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

のどちらを先に使うと計算がラクになるでしょうか。

(ii) $x^2+4y^2=A$ と**置き換えて**展開すると計算がラクになります。

(iii) 3 文字の展開公式

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

を用います。

解答・解説

式の計算・展開

1 (1) x についての整式

$$2A+B=4x^3+7x^2+4x-1 \quad \cdots\cdots ①$$
$$A-B=-x^3-4x^2+5x+1 \quad \cdots\cdots ②$$

について，① + ② として，B を消去すると

$$3A=3x^3+3x^2+9x \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{A=x^3+x^2+3x}}$$

また，① − 2 × ② として，A を消去すると

$$3B=6x^3+15x^2-6x-3 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{B=2x^3+5x^2-2x-1}}$$

(2) 指数法則を用いて計算すると

$$5xy^2\times(-2x^2y)^2=5xy^2\times(-2)^2x^{2\cdot2}y^2=20x^{1+4}y^{2+2}=\underline{\boldsymbol{20x^5y^4}}$$

(3) 与式を展開し，降べきの順に並べると

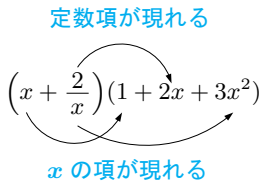
$$\left(x+\frac{2}{x}\right)(1+2x+3x^2)=x+2x^2+3x^3+\frac{2}{x}+4+6x$$
$$=3x^3+2x^2+7x+4+\frac{2}{x}$$

よって，**定数項は 4**，**x の係数は 7**

別解 定数項と x が現れる項のみを拾うと

定数項は　$\dfrac{2}{x}\cdot 2x=4$

x の項は　$x\cdot 1+\dfrac{2}{x}\cdot 3x^2=7x$



(4) (i) 2 乗でくくると

$$(x+1)^2(x-1)^2=\{(x+1)(x-1)\}^2$$
$$=(x^2-1)^2$$
$$=\underline{\boldsymbol{x^4-2x^2+1}}$$

(ii) 公式が使えるように展開の仕方を工夫すると

$$(\text{与式})=(x^2+4y^2-2xy)(x^2+4y^2+2xy)$$
$$=(x^2+4y^2)^2-(2xy)^2$$
$$=(x^4+8x^2y^2+16y^4)-4x^2y^2$$
$$=\underline{\boldsymbol{x^4+4x^2y^2+16y^4}}$$

(iii) $(x-2y+3z)^2=x^2+(-2y)^2+(3z)^2+2x(-2y)+2(-2y)\cdot 3z+2\cdot 3z\cdot x$

$$=\underline{\boldsymbol{x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx}}$$