

問題

有理化

9 次の各式の分母を有理化し、簡単にせよ。

$$(1) \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}} \quad (\text{長崎総合科学大})$$

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}-1} \quad (\text{神戸薬科大})$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2} + 1} \quad (\text{大阪経済大})$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \quad (\text{中部大})$$

チェック・チェック

有理化

9 分母を有理化するには

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

として、分母において $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ の公式を利用します。

(3) (分母) $= (\sqrt{6} + 1) + \sqrt{2}$ とみて分母を有理化しましょう。

(4) 分母の有理化を 2 回実行します。

解答・解説

有理化

9 (1) 分母と分子に $\sqrt{3} - 1$ をかけると

$$(\text{与式}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

(2) 各項の分母をそれぞれ有理化すると

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{2 - 1} = \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} - 2}{3 - 2} = \sqrt{6} - 2$$

$$\frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} + 1$$

したがって

$$(\text{与式}) = (\sqrt{6} + \sqrt{3}) - (\sqrt{6} - 2) - (\sqrt{3} + 1) \\ = \underline{\underline{1}}$$

(3) 分母と分子に $(\sqrt{6} + 1) - \sqrt{2}$ をかけると

$$(\text{与式}) = \frac{(\sqrt{6} + 1) - \sqrt{2}}{\{(\sqrt{6} + 1) + \sqrt{2}\}\{(\sqrt{6} + 1) - \sqrt{2}\}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1}{(\sqrt{6} + 1)^2 - (\sqrt{2})^2} \\ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1}{5 + 2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1)(5 - 2\sqrt{6})}{(5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6})} \\ = (\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1)(5 - 2\sqrt{6}) \\ = 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2} + 5 - 12 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} \\ = \underline{\underline{3\sqrt{6} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 7}}$$

(4) 分母と分子に $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}$ をかけると

$$(\text{与式}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{\{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}\}\{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}\}} \\ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \\ = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \\ = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}}}}$$