問題

整数部分・小数部分

13 $\sqrt{7}$ の小数部分を a とすると，$a = \sqrt{7} - \boxed{}$ である。
また，$a^2 + 4a - 5 = \boxed{}$ となる。　（大阪産業大　改）

14 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，
$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$，$b^2 + 2b + 5 = \boxed{}$ である。　（西日本工業大）

15 $x = \dfrac{1}{4-\sqrt{11}}$ を小数で表すとき，整数部分は $\boxed{}$，小数点以下第1位の数字は $\boxed{}$ である。　（青山学院大）

16 n を自然数とする。$\sqrt{n^2+1}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，
$-a + \dfrac{1}{b} = \boxed{}$ である。また，$-a + \dfrac{1}{b} = 5\sqrt{2}$ となる n の値は $\boxed{}$ である。　（愛知工業大）

チェック・チェック

整数部分・小数部分

13 実数 x の整数部分が a，小数部分が b のとき

$$x = a + b \quad (0 \leqq b < 1)$$

なので，a の値がわかれば，$b = x - a$ です。

14 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の分母を有理化することにより，整数部分 a がわかります。
$1 < 3 < 4$ より $1 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ として，$\sqrt{3}$ の整数部分は 1 とわかりますが，
$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$（ヒトナミニオゴレヤ）は覚えておくとよいでしょう。

15 小数点以下第1位の数字まで要求されています。$3 < \sqrt{11} < 4$ では評価が甘いので，$\sqrt{11}$ と $\dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$ を比較してみます。

$$(\sqrt{11})^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 11 - \frac{49}{4} = -\frac{5}{4} < 0$$

より，$\sqrt{11} < \dfrac{7}{2}$ であり，$3 < \sqrt{11} < \dfrac{7}{2}$ です。

16 n は自然数なので，$\sqrt{n^2+1}$ の整数部分が a とは

$$a \leqq \sqrt{n^2+1} < a+1$$

が成り立つことです。

$$(n+1)^2 - (n^2+1) = 2n > 0$$

より

$$n^2+1 < (n+1)^2$$

ですから，$n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$ に着目しましょう。

解答・解説

整数部分・小数部分

13 $\sqrt{4}=2$，$\sqrt{9}=3$ であるから $2<\sqrt{7}<3$ より，$\sqrt{7}$ の整数部分は 2 である。
したがって，$\sqrt{7}$ の小数部分 a は

$$a=\sqrt{7}-\underline{\mathbf{2}}$$

このとき

$$a^2+4a-5=(a-1)(a+5)=(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)=7-9=\underline{\mathbf{-2}}$$

14 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の分母を有理化すると

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

$1<\sqrt{3}<2$ より，$3<2+\sqrt{3}<4$ であるから，$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の

整数部分 a は　　$a=\underline{\mathbf{3}}$

小数部分 b は　　$b=\left(2+\sqrt{3}\right)-3=\underline{\boldsymbol{\sqrt{3}-1}}$

このとき

$$b^2+2b+5=(b+1)^2+4=(\sqrt{3})^2+4=\underline{\mathbf{7}}$$

15 $x=\dfrac{1}{4-\sqrt{11}}$ の分母を有理化すると

$$x=\frac{4+\sqrt{11}}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}=\frac{4+\sqrt{11}}{16-11}=\frac{4+\sqrt{11}}{5}$$

ここで，$3^2<11<\left(\dfrac{7}{2}\right)^2$ より $3<\sqrt{11}<\dfrac{7}{2}$ であるから

$$7<4+\sqrt{11}<\frac{15}{2} \qquad \therefore \quad \frac{7}{5}<\frac{4+\sqrt{11}}{5}<\frac{3}{2}$$

$\dfrac{7}{5}=1.4$，$\dfrac{3}{2}=1.5$ だから，$x=\dfrac{1}{4-\sqrt{11}}$ を小数で表すと

整数部分は $\underline{\mathbf{1}}$，小数点以下第 1 位の数字は $\underline{\mathbf{4}}$

16 n は自然数なので

$$\boldsymbol{n} = \sqrt{n^2} < \sqrt{\boldsymbol{n^2+1}} < \sqrt{(n+1)^2} = \boldsymbol{n+1}$$

であるから

整数部分 a は　　$a = n$

小数部分 b は　　$b = \sqrt{n^2+1} - n$

このとき

$$-a + \frac{1}{b} = -n + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} = -n + \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^2+1-n^2}$$

$$= \underline{\boldsymbol{\sqrt{n^2+1}}}$$

また，$-a + \dfrac{1}{b} = 5\sqrt{2}$ となる n の値は

$$\sqrt{n^2+1} = 5\sqrt{2}$$

の両辺を 2 乗すると

$$n^2 + 1 = 50 \qquad \therefore \quad n^2 = 49$$

n は自然数より　　$\underline{\boldsymbol{n = 7}}$