問題

式の値：$\sqrt{\quad}$ をはずす

17 $x=2-\sqrt{3}$ のとき，$x^2-4x=$ $\boxed{}$ であり

$x^3-2x^2-7x-1=$ $\boxed{}$

である。（福岡工業大）

18 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，分母を有理化すると $x=$ $\boxed{}$ となる。

また，$x^2-10x+2$ の値を計算すると $\boxed{}$ となる。（北海道工業大）

19 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ とする。このとき

$a^4=\boxed{}+\boxed{}a+\boxed{}a^2$

が成り立つ。ただし，$\boxed{}$ の中に入る数は有理数である。（甲南大）

チェック・チェック

式の値：$\sqrt{\quad}$ をはずす

17 $x=2-\sqrt{3}$ を代入すれば式の値は求まりますが，計算が煩雑です。

$x-2=-\sqrt{3}$ を平方して整理すると

$x^2-4x+1=0$

x はこの方程式の解としてとらえることができます。

$x^2=4x-1$

と変形すれば，2 次式 x^2 を 1 次式 $4x-1$ に置き換えることができます。

18 分母を有理化した x の値を $x^2-10x+2$ に代入すれば，値は求まりますが，代入する x を 1 箇所にまとめて（平方完成して）おけば，計算量を減らすことができます。

19 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ を利用します。2 度平方するとすべての $\sqrt{\quad}$ をはずすことができます。

解答・解説

式の値：$\sqrt{}$ をはずす

17 $x = 2 - \sqrt{3}$ より　$x - 2 = -\sqrt{3}$
両辺を 2 乗すると

$$(x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{x^2 - 4x = -1}}$$

これはさらに $x^2 = 4x - 1$ と変形できて

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 7x - 1 &= x(4x-1) - 2(4x-1) - 7x - 1 \\ &= 4x^2 - 16x + 1 = 4(4x-1) - 16x + 1 \\ &= \underline{\boldsymbol{-3}} \end{aligned}$$

18 分母を有理化すると

$$x = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2} = \underline{\boldsymbol{5+2\sqrt{6}}}$$

したがって

$$x^2 - 10x + 2 = (x-5)^2 - 23 = (2\sqrt{6})^2 - 23 = \underline{\boldsymbol{1}}$$

19 $\sqrt{6}$ を左辺に移項して，両辺を 2 乗すると

$$(a-\sqrt{6})^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \qquad \therefore \quad a^2 - 2\sqrt{6}a + 6 = 5 + 2\sqrt{6}$$

よって

$$a^2 + 1 = 2\sqrt{6}(a+1)$$

さらに，この式の両辺を 2 乗すると

$$(a^2+1)^2 = (2\sqrt{6})^2(a+1)^2$$

$$a^4 + 2a^2 + 1 = 24(a^2 + 2a + 1)$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{a^4 = 23 + 48a + 22a^2}}$$