1章:数と式

問題

21
$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$$
 のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ の値は _____ である。

また,
$$x=\frac{\sqrt{p}-\sqrt{3}}{\sqrt{p}+\sqrt{3}}$$
 が $x^2+\frac{1}{x^2}=62$ をみたすとき, p の値は このある。 (福岡大)

22
$$x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$
, $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ のとき $x^2 - y^2 =$, $x^5y^3 - x^3y^5 =$ (大同工業大)

チェック・チェック

- 20 x, y についての対称式の値を求める問題です。p.14【式の値 : 2 文字の対称式】 で解説したように
- $x,\ y$ についての対称式は、必ず基本対称式 $x+y,\ xy$ で表すことができることに着目します。
- 21 $x^2+\frac{1}{x^2}$ は x と $\frac{1}{x}$ についての対称式です。x と $\frac{1}{x}$ についての対称式は $x\cdot\frac{1}{x}=1$ より, $x+\frac{1}{x}$ で表すことができます。
- 22 求める式は x, y の交代式なので, x-y, x+y, xy で表すことができます。 【注意】整式の中の 2 文字を入れ換えると、その式の符号だけが変わる式を この 2 文字についての交代式といいます。

解答・解説

20
$$x+y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \underline{4}$$

$$\sharp \not \sim xy = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \underline{\mathbf{1}}$$

$$x^{2} + y^{2} = (x + y)^{2} - 2xy = 4^{2} - 2 \cdot 1 = 14$$

21
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \quad \dots$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1}$$
 のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} + \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{(\sqrt{5} - 1)^2 + (\sqrt{5} + 1)^2}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)}$$
$$= \frac{(6 - 2\sqrt{5}) + (6 + 2\sqrt{5})}{5 - 1} = 3$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 - 2 = \underline{7}$$

また,
$$x = \frac{\sqrt{p} - \sqrt{3}}{\sqrt{p} + \sqrt{3}}$$
 のとき

$$x + \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{p} - \sqrt{3}}{\sqrt{p} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{p} + \sqrt{3}}{\sqrt{p} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{p} - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{p} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{p} + \sqrt{3})(\sqrt{p} - \sqrt{3})}$$
$$= \frac{(p + 3 - 2\sqrt{3p}) + (p + 3 + 2\sqrt{3p})}{p - 3} = \frac{2(p + 3)}{p - 3}$$

であるから、① と
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 62$$
 より

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 62 \qquad \therefore \quad x + \frac{1}{x} = \pm 8$$

$$x + \frac{1}{x} = 8 \mathcal{O}$$

$$\frac{2(p+3)}{p-3} = 8 \qquad \therefore \quad p = 5$$

$$x + \frac{1}{x} = -8 \text{ Obs}$$

$$\frac{2(p+3)}{p-3} = -8$$
 : $p = \frac{9}{5}$

したがって、
$$p$$
 の値は $p=5, \frac{9}{5}$

1章:数と式

3 : 実数

22
$$x = \sqrt{6} + \sqrt{2}, \ y = \sqrt{6} - \sqrt{2} \ \sharp \ \emptyset$$

 $x + y = 2\sqrt{6}, \ x - y = 2\sqrt{2}, \ xy = 6 - 2 = 4$
 $\sharp \supset \tau$
 $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{3}$
 $x^5y^3 - x^3y^5 = x^3y^3(x^2 - y^2) = 4^3 \times 8\sqrt{3} = 512\sqrt{3}$