問題

放物線と直線の共有点

43 放物線 $y=-(a^2+1)x^2+2ax+5$ が直線 $y=1$ の $1 \leqq x \leqq 2$ の部分と共有点をもつ定数 a の値の範囲を求めよ。（関西大）

44 曲線 $y=5-9x^2$，$-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1$ と直線 $y=m(x+1)$ とが共有点をもつのは $\boxed{} \leqq m \leqq \boxed{}$ のときである。（東京薬科大）

45 2 つの放物線 $C_1 : y=(x+2)^2$，$C_2 : y=6-(x-2)^2$ と，直線 $l : y=ax+b$ がある。a の値を決めたとき

「l が C_1，C_2 のどちらとも共有点をもたない」

ような b が存在するのは $\boxed{} < a < \boxed{}$ のときである。

（東京薬科大）

チェック・チェック

放物線と直線の共有点

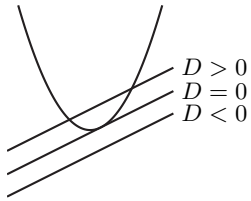
43 放物線と線分 $y=1$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ を同一平面上に図示してみましょう。

44 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が共有点をもつということは

方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ が実数解をもつ

ということですね。異なる実数解の個数と共有点の個数は，この 2 次方程式の判別式を D とすると，次のように対応します。

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
異なる実数解の個数	2 個	1 個	0 個
共有点の個数	2 個	1 個	0 個



なお，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，
$\boldsymbol{D=b^2-4ac}$ を，この 2 次方程式の**判別式**といいます。

45 「a の値を決めたとき，～をみたす b が存在する」という表現に注意しましょう。第 3 章の **91**，**92** も参照して下さい。

解答・解説

放物線と直線の共有点

43　$f(x) = -(a^2+1)x^2 + 2ax + 5$ とおく。

$-(a^2+1) < 0$ より，$y = f(x)$ のグラフは上に凸であり，さらに $f(0) = 5 > 1$ より放物線 $y = f(x)$ が線分 $y = 1$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ と共有点をもつ条件は

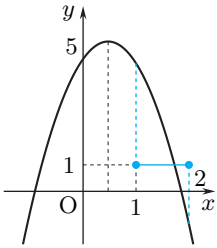
$$f(1) \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad f(2) \leqq 1$$

$$-a^2 + 2a + 4 \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad -4a^2 + 4a + 1 \leqq 1$$

$$(a+1)(a-3) \leqq 0 \quad \text{かつ} \quad a(a-1) \geqq 0$$

$$-1 \leqq a \leqq 3 \quad \text{かつ「}a \leqq 0 \text{ または } 1 \leqq a\text{」}$$

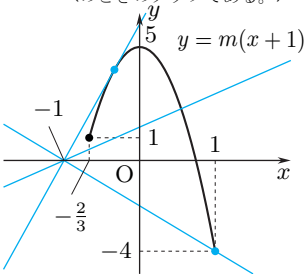
$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 0,\ 1 \leqq a \leqq 3}}$$



（これは 軸：$x = \dfrac{a}{a^2+1} > 0$ のときのグラフである。）

44　直線 $y = m(x+1)$ は点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾きが m の直線であり，右図のようになる。

放物線の $-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1$ の部分と直線が共有点をもつのは，直線が点 $(1,\ -4)$ を通るときと放物線と接するときの間（両端も含む）にあるときである。



直線が点 $(1,\ -4)$ を通るとき，その傾き m は

$$-4 = m(1+1) \qquad \therefore \quad m = -2$$

放物線と直線が接するときは，2 つの方程式を連立すると

$$5 - 9x^2 = m(x+1) \text{ すなわち } 9x^2 + mx + m - 5 = 0$$

はただ 1 つの実数解をもつから，（判別式）$= 0$ であり

$$m^2 - 4 \cdot 9(m-5) = 0 \qquad (m-6)(m-30) = 0 \qquad \therefore \quad m = 6,\ 30$$

すると，接点の x 座標は $-\dfrac{m}{18}$ で

$$-\frac{2}{3} \leqq -\frac{m}{18} \leqq 1 \qquad \therefore \quad -18 \leqq m \leqq 12$$

これより $m = 6$ であり，求める m の範囲は　$\underline{\boldsymbol{-2 \leqq m \leqq 6}}$

45　C_1，C_2 と l の方程式を連立すると

$$x^2 + 4x + 4 = ax + b \text{ すなわち } x^2 + (4-a)x + 4 - b = 0$$

$$6 - (x^2 - 4x + 4) = ax + b \text{ すなわち } x^2 + (a-4)x + b - 2 = 0$$

どちらも実数解をもたないから，ともに（判別式）< 0 より

$$\begin{cases} (4-a)^2 - 4(4-b) < 0 \\ (a-4)^2 - 4(b-2) < 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad a^2 - 8a + 24 < 4b < -a^2 + 8a$$

これをみたす b が存在する条件は

$$a^2 - 8a + 24 < -a^2 + 8a \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{2 < a < 6}}$$