問題

放物線により切り取られる線分の長さ

46　2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフが，x 軸から切り取る線分の長さが 1 で，点 $(3,\ 2)$ を通るとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ。（崇城大）

47　2 次関数 $y=\dfrac{9}{4}x^2+ax+b$ のグラフを C とし，C が 2 点$(0,\ 4)$と$(2,\ k)$を通るとする。このとき，$a=\dfrac{k-\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$b=\boxed{\text{エ}}$ である。

グラフ C が x 軸と 2 点 A，B で交わり，線分 AB の長さが 2 以上となる k の範囲は $k\leqq\boxed{\text{オカ}}$，$\boxed{\text{キク}}\leqq k$ である。（センター試験）

チェック・チェック

放物線により切り取られる線分の長さ

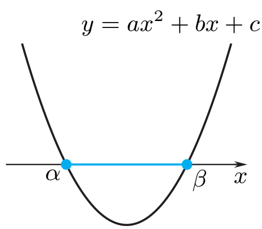
46，**47**　放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との交点の x 座標を α，β（$\alpha<\beta$）とすると，α，β は

方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる 2 つの実数解

です。これは x 軸：$y=0$ と放物線の方程式が同時に成り立つことから

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ y=0 \end{cases}$$

という連立方程式の解として x 軸との交点を求めているわけですね。このとき，放物線により切り取られる線分の長さは $\boldsymbol{\beta-\alpha}$ になります。



解答・解説

放物線により切り取られる線分の長さ

46 $y=x^2+ax+b$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は $x^2+ax+b=0$ の異なる 2 つの実数解である。この判別式 D について，$D>0$ より

$$a^2-4b>0 \quad \cdots\cdots ①$$

このもとで，交点の x 座標は

$$x^2+ax+b=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

であるから，x 軸から切り取る線分の長さが 1 より

$$\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}=1 \qquad \therefore \quad \sqrt{a^2-4b}=1$$

両辺を 2 乗して

$$a^2-4b=1 \quad \cdots\cdots ②$$

また，$y=x^2+ax+b$ のグラフが点 $(3,\ 2)$ を通るとき

$$2=9+3a+b \qquad \therefore \quad b=-3a-7 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ より b を消去して

$$a^2-4(-3a-7)=1 \qquad \therefore \quad a=-9,\ -3$$

これらと ③ より $(a,\ b)=(-9,\ 20),\ (-3,\ 2)$ であり，これらは ① をみたすから

$$\underline{\boldsymbol{(a,\ b)=(-9,\ 20),\quad (-3,\ 2)}}$$

47 $C: y=\dfrac{9}{4}x^2+ax+b$ が点 $(0,\ 4)$，$(2,\ k)$ を通ることから

$$\begin{cases} b=4 \\ k=9+2a+b \end{cases} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{a=\frac{k-13}{2},\ b=4}}$$

このとき，A，B の x 座標は，2 次方程式

$$\frac{9}{4}x^2+\frac{k-13}{2}x+4=0 \text{ すなわち } 9x^2+2(k-13)x+16=0$$

の異なる 2 つの実数解である。この判別式 D について，$D'=\dfrac{D}{4}$ とおくと

$$D'>0 \qquad (k-13)^2-9\cdot 16>0 \qquad \therefore \quad k<1,\quad 25<k \quad \cdots\cdots ①$$

このもとで，$\mathrm{AB} \geqq 2$ より

$$\frac{-(k-13)+\sqrt{D'}}{9}-\frac{-(k-13)-\sqrt{D'}}{9}\geqq 2 \qquad \therefore \quad \sqrt{k^2-26k+25}\geqq 9$$

両辺を 2 乗して

$$k^2-26k+25\geqq 81 \qquad \therefore \quad k\leqq -2,\quad 28\leqq k$$

これは ① をみたすから　$\underline{\boldsymbol{k\leqq -2,\quad 28\leqq k}}$