問題

2 つの放物線の共有点

48 2 次関数 $y=x^2$ と $y=-x^2+bx-b$ の 2 つのグラフが共有点をもたないときの b の値の範囲は $\boxed{} < b < \boxed{}$ である。また，$b>0$ のとき上の 2 つのグラフが互いに接するのは $b=\boxed{}$ のときで，その接点の座標は $\boxed{}$ である。 （摂南大）

49 2 つの曲線 $y=(x-1)^2-a$ と $y=a(x+1)^2+1$ が共有点をもつのは

$$\boxed{}-\sqrt{\boxed{}} \leqq a \leqq \boxed{}+\sqrt{\boxed{}}$$

のときである。 （大阪電気通信大）

チェック・チェック

2 つの放物線の共有点

48，**49** 2 つの放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点を求めるということは

$$\text{連立方程式} \begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$$

を解くということです。したがって，**共有点の個数**を調べるには

方程式：$f(x)=g(x)$

の**実数解の個数**を調べるということになります。とくに，これが 2 次方程式のときは**判別式の符号**を調べることになります。

解答・解説

2 つの放物線の共有点

48 $y=x^2$ ……①，$y=-x^2+bx-b$ ……②

① と ② を連立して　$2x^2-bx+b=0$ ……③

判別式を D とすると　$D=b^2-8b=b(b-8)$

①と②のグラフが共有点をもたない

$\Longleftrightarrow$ ③が実数解をもたない

$\Longleftrightarrow$ $D<0$　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{0<b<8}}$

$b>0$ で①，②のグラフが接するのは $D=0$ より　$\underline{\boldsymbol{b=8}}$

このとき，③より

$2x^2-8x+8=0$　$(x-2)^2=0$　$\therefore$　$x=2$

①より $y=4$ であり，接点の座標は　$\underline{\boldsymbol{(2,\ 4)}}$

49 $y=(x-1)^2-a$ ……①，$y=a(x+1)^2+1$ ……②

① と ② を連立して　$(1-a)x^2-2(1+a)x-2a=0$ ……③

(i) $a=1$ のとき，③ は $-4x-2=0$ となる。

よって，実数解 $x=-\dfrac{1}{2}$ をもつ。

(ii) $a\neq 1$ のとき，③は x の 2 次方程式であり，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(1+a)^2+2a(1-a)=-a^2+4a+1$$

2 つの曲線が共有点をもつのは

$$\frac{D}{4}\geqq 0 \qquad \therefore \quad 2-\sqrt{5}\leqq a\leqq 2+\sqrt{5} \quad (a\neq 1)$$

(i)，(ii) を合わせて　$\underline{\boldsymbol{2-\sqrt{5}\leqq a\leqq 2+\sqrt{5}}}$