問題

1 次関数の最大・最小

53 1 次関数 $y = ax + b$ の $-3 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 6，最小値が -2 であるとき，定数 a，b の値をすべて求めよ。　（北海道医療大）

54 1 次関数 $f(x) = ax + b$ で，次の条件

$$3 \leqq f(1) \leqq 6, \quad 4 \leqq f(2) \leqq 8$$

をみたすものを考える。

このような 1 次関数 $f(x)$ のなかで，$f(5)$ が最大となるのは $a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ のときで，$f(5) = \boxed{}$ である。また，$f(5)$ が最小となるのは $a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ のときで，$f(5) = \boxed{}$ である。　（上智大）

55 a は定数で，$1 < a < 2$ をみたすとき，関数

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$$

は，$x = \boxed{}$ で，最小値 $\boxed{}$ をとる。　（神戸薬科大）

チェック・チェック

1 次関数の最大・最小

53 **1 次関数** $y = ax + b$ と与えられているので，$a \neq 0$ が前提となっています。

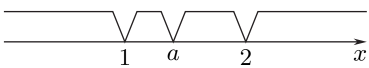
また，1 次関数 $y = ax + b$ は

$a > 0$ のとき，単調増加
$a < 0$ のとき，単調減少

です。

54 1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは 2 点 $(1,\ f(1))$，$(2,\ f(2))$ を通る直線です。$f(1)$，$f(2)$ を与えられた範囲でとりながら，直線を動かしてみましょう。

55 $y = f(x)$ のグラフは折れ線となります。$1 < a < 2$ より，右図の 4 通りに場合分けして絶対値をはずしましょう。



解答・解説

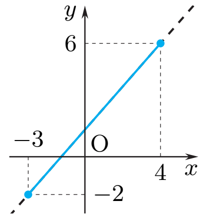
1 次関数の最大・最小

53 $f(x)=ax+b$ とおく。$f(x)$ は 1 次関数より $a \neq 0$ である。

(i) $a>0$ のとき

1 次関数 $f(x)$ は単調増加であり，$-3 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $f(4)$，最小値は $f(-3)$ だから

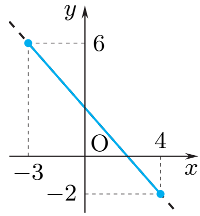
$$\begin{cases} f(4)=4a+b=6 \\ f(-3)=-3a+b=-2 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=\frac{8}{7}} \\ \boldsymbol{b=\frac{10}{7}} \end{cases}}$$



(ii) $a<0$ のとき

1 次関数 $f(x)$ は単調減少であり，$-3 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $f(-3)$，最小値は $f(4)$ だから

$$\begin{cases} f(-3)=-3a+b=6 \\ f(4)=4a+b=-2 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=-\frac{8}{7}} \\ \boldsymbol{b=\frac{18}{7}} \end{cases}}$$



54 $f(5)$ が最大となるのは，直線 $y=ax+b$ が 2 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 8)$ を通るときであるから

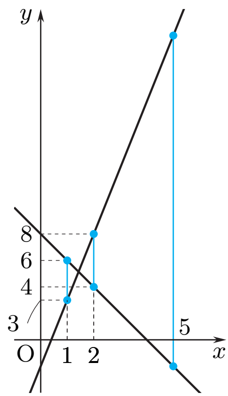
$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=8 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=5} \\ \boldsymbol{b=-2} \end{cases}}$$

このとき　　$f(5)=5\cdot5-2=\underline{\boldsymbol{23}}$

$f(5)$ が最小となるのは，直線 $y=ax+b$ が 2 点 $(1,\ 6)$，$(2,\ 4)$ を通るときであるから

$$\begin{cases} a+b=6 \\ 2a+b=4 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=-2} \\ \boldsymbol{b=8} \end{cases}}$$

このとき　　$f(5)=-2\cdot5+8=\underline{\boldsymbol{-2}}$



55 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-a|$，$1<a<2$ より

(i) $x<1$ のとき

$$f(x)=-(x-1)-(x-2)-(x-a)=-3x+3+a$$

(ii) $1\leqq x<a$ のとき

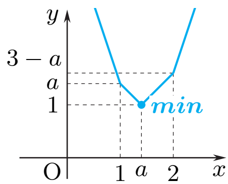
$$f(x)=(x-1)-(x-2)-(x-a)=-x+1+a$$

(iii) $a\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=(x-1)-(x-2)+(x-a)=x+1-a$$

(iv) $x\geqq 2$ のとき

$$f(x)=(x-1)+(x-2)+(x-a)=3x-3-a$$



したがって，$f(x)$ は

$x\leqq a$ のとき単調減少，$x\geqq a$ のとき単調増加

であり，$\underline{\boldsymbol{x=a}}$ で最小値 $\underline{\mathbf{1}}$ をとる。