問題

2 次関数の最大・最小（場合分け，置き換え）

59 定義域を $1 \leqq x \leqq 4$ とする関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 2a + b$ の最大値が 9，最小値が 1 のとき，a，b の値を求めよ。（岡山理科大）

60 関数 $f(x) = x^2 + ax - 2a + 6$ の $x \geqq 0$ における最小値が 1 であるとき，a の値を求めよ。（岩手大）

61 2 次関数 $f(x) = x^2 - 10x + a$ について

(1) $a \leqq x \leqq a + 1$ における $f(x)$ の最大値 $g(a)$ を求めよ。

(2) $a \leqq x \leqq a + 1$ における $f(x)$ の最小値 $h(a)$ を求めよ。（東北学院大）

62 関数 $y = (x^2+2x+3)(-x^2-2x+1)-2x^2-4x-1$ は，$x^2+2x = t$ とおくと，t の式で $y = \boxed{}$ と表される。また，y の最大値は $\boxed{}$ である。（東京歯科大）

チェック・チェック

2 次関数の最大・最小（場合分け，置き換え）

59 まずは **$a = 0$，$a \neq 0$ の場合分け**が必要です。さらに，$a \neq 0$ のときは $a > 0$，$a < 0$ により $y = f(x)$ のグラフが**下に凸**，**上に凸**と分かれます。

60 **軸：$x = -\dfrac{a}{2}$ が定義域 $x \geqq 0$ の中にあるか否かの場合分け**が必要です。

$y = f(x)$ のグラフは下に凸なので

軸が定義域の中にあるときは，頂点の y 座標が最小値
軸が定義域の中にないときは，軸に近いところで最小値

となります。

61 軸の位置は固定されていて，定義域が動くというタイプの最大・最小問題です。

$y = f(x)$ のグラフは下に凸なので

(1) 最大値については，**定義域の中点と軸 $x = 5$ の位置**を比較します。

(2) 最小値については，**軸 $x = 5$ が定義域の右側，定義域の内側，定義域の左側**の 3 つに場合分けします。

62 $y = f(x)$ は x が実数全体を動くときの関数ですが，$x^2 + 2x = t$ とおいたときの t の関数 y は $t = (x+1)^2 - 1 \geqq -1$ より $t \geqq -1$ の範囲で定義される関数です。このように，置き換えたあとの変数 **t の変域**に注意しましょう。

解答・解説

2 次関数の最大・最小（場合分け，置き換え）

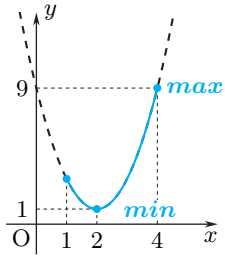
59　(i) $a=0$ のとき

$f(x)=b$ となり，$f(x)$ は一定の値 b をとる。よって，最大値が 9，最小値が 1 となることはないので不適。

(ii) $a \neq 0$ のとき

$f(x)$ は 2 次関数であり

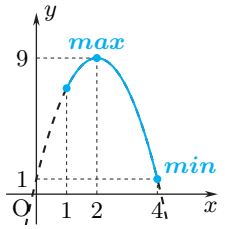
$$f(x)=ax^2-4ax+2a+b=a(x-2)^2-2a+b$$



（ア）$a>0$ のとき

関数 $y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，$1 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $f(4)$，最小値は $f(2)$ である。

$$\begin{cases} f(4)=2a+b=9 \\ f(2)=-2a+b=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{a=2} \\ \boldsymbol{b=5} \end{cases}$$



（イ）$a<0$ のとき

関数 $y=f(x)$ のグラフは上に凸であり，$1 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $f(2)$，最小値は $f(4)$ である。

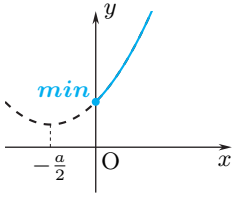
$$\begin{cases} f(2)=-2a+b=9 \\ f(4)=2a+b=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \boldsymbol{a=-2} \\ \boldsymbol{b=5} \end{cases}$$

60　$f(x)=x^2+ax-2a+6=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-2a+6$

(i) $-\dfrac{a}{2}<0$ すなわち $a>0$ のとき

関数 $f(x)$ の $x \geqq 0$ における最小値は $f(0)$ だから

$$-2a+6=1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a=\frac{5}{2}}$$



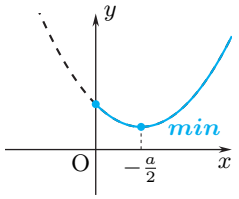
(ii) $-\dfrac{a}{2} \geqq 0$ すなわち $a \leqq 0$ のとき

関数 $f(x)$ の $x \geqq 0$ における最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ だから

$$-\frac{a^2}{4}-2a+6=1$$

$$a^2+8a-20=0 \qquad \therefore \quad a=-10,\ 2$$

$a \leqq 0$ より　$\boldsymbol{a=-10}$



61　$f(x) = x^2 - 10x + a = (x-5)^2 - 25 + a$

より頂点の座標は $(5,\ a-25)$ であり，グラフは下に凸だから

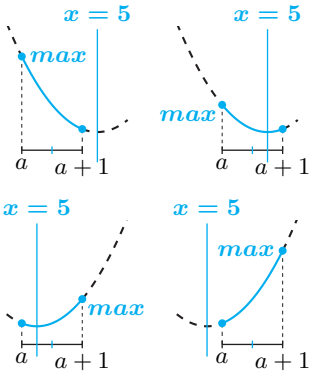
(1)　$a \leqq x \leqq a+1$ のとき，最大値 $g(a)$ は

(i)　$\dfrac{2a+1}{2} \leqq 5$ すなわち $\boldsymbol{a \leqq \dfrac{9}{2}}$ **のとき**

$g(a) = f(a) = \boldsymbol{a^2 - 9a}$

(ii)　$\dfrac{2a+1}{2} > 5$ すなわち $\boldsymbol{\dfrac{9}{2} < a}$ **のとき**

$g(a) = f(a+1) = \boldsymbol{a^2 - 7a - 9}$



(2)　$a \leqq x \leqq a+1$ のとき，最小値 $h(a)$ は

(i)　$a+1 < 5$ すなわち $\boldsymbol{a < 4}$ **のとき**

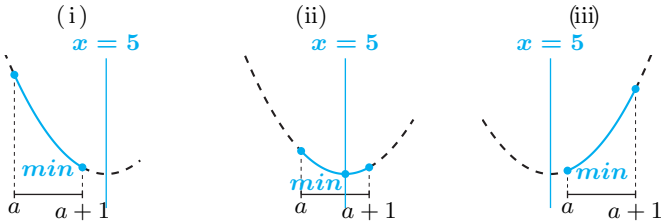
$h(a) = f(a+1) = \boldsymbol{a^2 - 7a - 9}$

(ii)　$a \leqq 5 \leqq a+1$ すなわち $\boldsymbol{4 \leqq a \leqq 5}$ **のとき**

$h(a) = f(5) = \boldsymbol{a - 25}$

(iii)　$\boldsymbol{5 < a}$ **のとき**

$h(a) = f(a) = \boldsymbol{a^2 - 9a}$



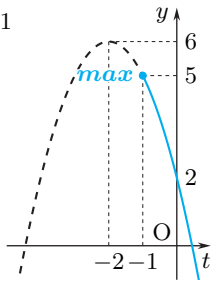
62　$y = \{(x^2+2x)+3\}\{-(x^2+2x)+1\} - 2(x^2+2x) - 1$

$= (t+3)(-t+1) - 2t - 1$

$= \boldsymbol{-t^2 - 4t + 2}$

$= -(t+2)^2 + 6$

また，$t = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ より，$t \geqq -1$ であり，

$t \geqq -1$ におけるグラフは右図のようになる。

よって，y は $t = -1$ のとき，最大値 **5** をとる。