問題

2 変数関数の最大・最小

63 以下の問いに答えよ。

(1) x，y の関数 $P = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 2$ の最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を示せ。

(2) $0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$ のとき，(1) の関数 P の最大値および最小値を求めよ。また，それぞれの場合の x，y の値を示せ。

(3) x，y の関数 $Q = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 2y + 2$ の最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を示せ。（豊橋技術科学大）

64 $x^2 + y^2 = 1$ であるとき，$x^2 + 4y$ は $(x,\ y) = \left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ のとき最大値 $\boxed{}$ をとり，$(x,\ y) = \left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。（東海大）

65 2 つの実数 x，y が，$x^2 + y^2 = 2$ を満たすものとする。このとき

(1) $x + y$ の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。

(2) xy の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。

(3) $(x-1)(y-1)$ の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。（成蹊大）

チェック・チェック

2 変数関数の最大・最小

63 (1) x，y それぞれについて平方完成しましょう。

(2) 2 変数関数の最小値を求めるには，**まず，一方を固定し，もう一方の変数についての関数とみて**最小値を求める。次に，固定してあった変数を動かして最小値を求める。すなわち，最小値の最小値を考えるわけです。

最大値についても同じく，最大値の最大値と考えていきます。

(3) xy という項がありますが，まずは x について平方完成し，さらに，y について平方完成しましょう。

64 x を消去しますが，x は実数なので

$$x^2 = 1 - y^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -1 \leqq y \leqq 1$$

として，消去した文字 x についての条件を y に置き換えておかなければなりません。

$(x,\ y) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおく方法もあります。

65 (1) では，$x + y = s$ とおいてみましょう。

(2) では，$xy = t$ とおき，t を s で表します。

(3) も s で表すことができます。

$(x,\ y) = (\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta)$ とおく方法もありますが，数学 II の内容が必要となります。

解答・解説

2 変数関数の最大・最小

63 (1) まず y を固定して与式を変形すると

$$P=(x+2)^2+3y^2-6y-2 \quad \cdots\cdots ①$$
$$=(x+2)^2+3(y-1)^2-5$$

よって，P は

<u>$\boldsymbol{x=-2,\ y=1}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-5}$</u>

をとる。

(2) (i) 最小値について

まず y を固定して，x を動かす。$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，① より P は

$x=0$ のとき，最小値 $m=3y^2-6y+2$

次に，y を動かす。この最小値 m を変形すると

$$m=3y^2-6y+2=3(y-1)^2-1$$

$0 \leqq y \leqq 3$ より，m は $y=1$ のとき，最小値 -1 をとるから，P は

<u>$\boldsymbol{x=0,\ y=1}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-1}$</u>

をとる。

(ii) 最大値について

まず y を固定して，x を動かす。$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，① より P は

$x=3$ のとき，最大値 $M=3y^2-6y+23$

次に，y を動かす。最大値 M を変形すると

$$M=3y^2-6y+23=3(y-1)^2+20$$

$0 \leqq y \leqq 3$ より，M は $y=3$ のとき，最大値 32 をとるから，P は

<u>$\boldsymbol{x=3,\ y=3}$ **のとき，最大値 32**</u>

をとる。

(3) Q を変形すると

$$Q=x^2-2(3y+1)x+10y^2+2y+2$$
$$=\{x-(3y+1)\}^2+y^2-4y+1$$
$$=\{x-(3y+1)\}^2+(y-2)^2-3$$

よって，Q は $x=3y+1$ かつ $y=2$ のとき最小値をとるから

<u>$\boldsymbol{x=7,\ y=2}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-3}$</u>

をとる。

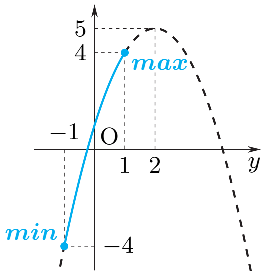
64 $x^2+y^2=1$ より $x^2=1-y^2$ であるから

$$x^2+4y=(1-y^2)+4y=-(y-2)^2+5$$

$x^2=1-y^2 \geqq 0$ より，$-1 \leqq y \leqq 1$ だから

$\underline{\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ 1)}}$ のとき，最大値 $\underline{\mathbf{4}}$

$\underline{\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ -1)}}$ のとき，最小値 $\underline{\mathbf{-4}}$



別解 $(x,\ y)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおいてもよい（数学II）。

$$x^2+4y=\cos^2\theta+4\sin\theta=(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta$$
$$=-(\sin\theta-2)^2+5$$

65 (1) $x+y=s$ とおくと $y=s-x$ であり，これを $x^2+y^2=2$ に代入すると

$$x^2+(s-x)^2=2 \text{ すなわち } 2x^2-2sx+s^2-2=0$$

x は実数だから，この x の 2 次方程式の判別式 D について

$$\frac{D}{4}=s^2-2(s^2-2) \geqq 0 \qquad \therefore \quad -2 \leqq s \leqq 2$$

よって，$s=x+y$ の

最大値 $\underline{\mathbf{2}}$，最小値 $\underline{\mathbf{-2}}$

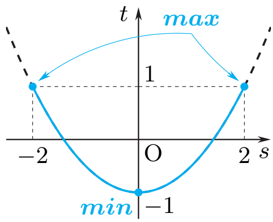
(2) $xy=t$ とおくと

$$s^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=2+2t$$

$$\therefore \quad t=\frac{s^2-2}{2}=\frac{1}{2}s^2-1$$

(1) より $-2 \leqq s \leqq 2$ だから，$t=xy$ の

最大値 $\underline{\mathbf{1}}$ $(s=-2,\ 2)$，最小値 $\underline{\mathbf{-1}}$ $(s=0)$



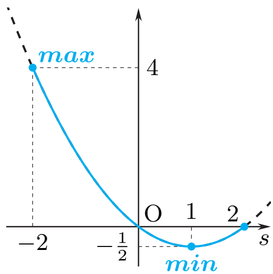
(3) $(x-1)(y-1)=xy-(x+y)+1$

$$=\frac{s^2-2}{2}-s+1$$

$$=\frac{1}{2}(s-1)^2-\frac{1}{2}$$

(1) より $-2 \leqq s \leqq 2$ だから，$(x-1)(y-1)$ の

最大値 $\underline{\mathbf{4}}$ $(s=-2)$，最小値 $\underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}}}$ $(s=1)$



別解 $(x,\ y)=(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta)$ とおいてもよい（数学II）。

(1) $x+y=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=2\sin(\theta+45^\circ)$

(2) $xy=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$