

1.3 2次方程式

問題

75 (1) 2次方程式 $x^2 - 4x - 5 = 0$ の解は $x = \square$, \square である。
(日本歯科大)

(2) 2次方程式 $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$ の解は $x = \square$, \square である。
(日本歯科大)

(3) 2次方程式 $2x^2 + 3x = 1 + 2x$ の解は $x = \square$, \square である。
(東京工芸大)

(4) 方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ の解は $x = \square$, \square である。(中央大)

76 (1) 方程式 $x^2 - 4|x| - 5 = 0$ を解くと \square 。(工学院大)

(2) 方程式 $x^2 - x - 8 = |x|$ を解け。(広島工業大)

(3) $|x^2 - x - 6| = 4x^2$ の実数解は $x = \square$, \square である。
(慶應義塾大 改)

チェック・チェック

75 まずは左辺の因数分解を考えます。

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

$$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$$

因数分解できないときは解の公式を用います。

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \text{ の解は } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + 2b'x + c = 0 \quad (a \neq 0) \text{ の解は } x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

76 (1) $x \geq 0$, $x < 0$ と場合分けをしてもよいのですが, $x^2 = |x|^2$ より
 $|x|^2 - 4|x| - 5 = 0$

とみることで, $|x|$ について解くことができます。

(2) $x \geq 0$, $x < 0$ と場合分けして絶対値をはずしましょう。

(3) $x^2 - x - 6 \geq 0$, $x^2 - x - 6 < 0$ と場合分けしてもよいのですが

$$|A| = B \text{ かつ } B > 0 \text{ ならば } A = \pm B$$

を利用して, 2つの方程式を解く解法もあります。

解答・解説

75 (1) $x^2 - 4x - 5 = 0$ の左辺を因数分解して

$$(x+1)(x-5) = 0 \quad \therefore \underline{x = -1, 5}$$

(2) $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$ の左辺を因数分解して

$$(x + \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) = 0 \quad \therefore \underline{x = -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}}$$

(3) $2x^2 + 3x = 1 + 2x$ を変形して

$$2x^2 + x - 1 = 0 \quad (x+1)(2x-1) = 0 \quad \therefore \underline{x = -1, \frac{1}{2}}$$

(4) 解の公式より $x = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 2} = \underline{2 \pm \sqrt{2}}$

76 (1) $x^2 = |x|^2$ であるから

$$|x|^2 - 4|x| - 5 = 0 \quad \therefore (|x|+1)(|x|-5) = 0$$

$|x| \geq 0$ であるから、求める解は

$$|x| = 5 \quad \therefore \underline{x = \pm 5}$$

(2) (i) $x \geq 0$ のとき

$$x^2 - x - 8 = x \quad \therefore (x+2)(x-4) = 0$$

$$x \geq 0 \text{ より } x = 4$$

(ii) $x < 0$ のとき

$$x^2 - x - 8 = -x \quad \therefore x^2 = 8$$

$$x < 0 \text{ より } x = -2\sqrt{2}$$

$$\text{以上より、求める解は } \underline{x = -2\sqrt{2}, 4}$$

(3) $|x^2 - x - 6| = 4x^2$ より

$$x^2 - x - 6 = \pm 4x^2$$

$$\therefore 3x^2 + x + 6 = 0 \quad \text{または} \quad 5x^2 - x - 6 = 0$$

$3x^2 + x + 6 = 0$ について、この2次方程式の判別式を D とすると

$$D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 6 < 0$$

より、実数解をもたない。

$5x^2 - x - 6 = 0$ について

$$5x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x+1)(5x-6) = 0$$

$$\therefore \underline{x = -1, \frac{6}{5}}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \times \\ \end{array} \begin{array}{r} -6 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow -6 \\ \longrightarrow \frac{5}{-1} \end{array}$$