1.6　絶対値を含む 1 次不等式

問題

82　次の不等式を解け。

(1)　$1 < |x-2| < 3$　（日本大）

(2)　$|2x| + |x-4| < 6$　（立教大）

83　(1)　関数 $y = |x+3| + |x-1|$ のグラフをかけ。

(2)　不等式 $6 \leqq |x+3| + |x-1| \leqq 10$ をみたす x の範囲を求めよ。（東京女子大）

84　a は実数の定数とする。

(1)　$|x-a| < 2$ をみたす実数 x の範囲を求めよ。

(2)　$|x-a| < 2$ をみたす正の実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(3)　$|x-a| < x+1$ をみたす実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(4)　a の値が (3) の範囲にあるとき，$|x-a| < x+1$ をみたす実数 x の値の範囲を求めよ。（慶應義塾大　改）

チェック・チェック

82　絶対値をはずしながら不等式を解く問題ですが，グラフがかけるときは，グラフも活用しましょう。ミスが減ります。

83　これはグラフの活用が重視された問題です。(2) では (1) のグラフと 2 本の直線 $y = 6$，$y = 10$ との交点を求めます。

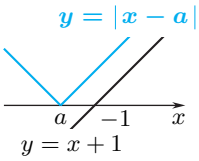
84 (1) 文字 a が入ってきましたが

$|x| < p\ (p > 0) \iff -p < x < p$

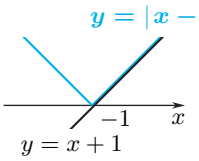
が基本です。

(2) $p < x < q$ をみたす正の実数 x が存在する条件は $q > 0$ です。

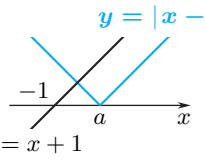
(3), (4) $y = |x - a|$ と $y = x + 1$ のグラフをかいてみましょう。



$a < -1$ のとき



$a = -1$ のとき



$a > -1$ のとき

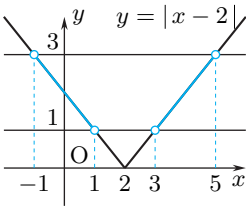
解答・解説

82　(1)　不等式を変形すると

$1 < |x-2| < 3$

$-3 < x-2 < -1$　または　$1 < x-2 < 3$

$\therefore$　$\boldsymbol{-1 < x < 1,\quad 3 < x < 5}$



(2)　(i)　$x < 0$ のとき

$-2x-(x-4) < 6$　　$\therefore$　$x > -\dfrac{2}{3}$

$x < 0$ と合わせて　　$-\dfrac{2}{3} < x < 0$

(ii)　$0 \leqq x < 4$ のとき

$2x-(x-4) < 6$　　$\therefore$　$x < 2$

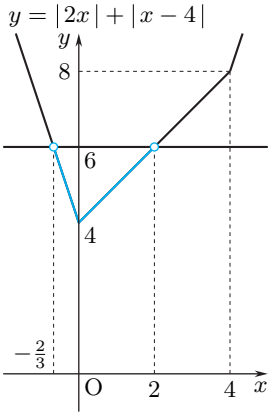
$0 \leqq x < 4$ と合わせて　　$0 \leqq x < 2$

(iii)　$x \geqq 4$ のとき

$2x+(x-4) < 6$　　$\therefore$　$x < \dfrac{10}{3}$

これは $x \geqq 4$ より不適。

以上より　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{3} < x < 2}$



83　(1)　(i)　$x < -3$ のとき

$y = -(x+3)-(x-1) = -2x-2$

(ii)　$-3 \leqq x < 1$ のとき

$y = (x+3)-(x-1) = 4$

(iii)　$x \geqq 1$ のとき

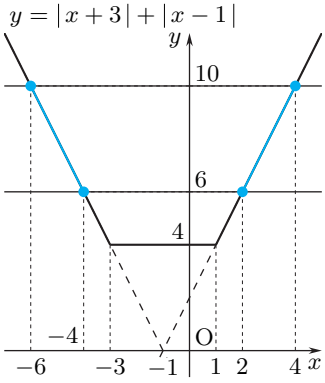
$y = (x+3)+(x-1) = 2x+2$

以上より，$y = |x+3|+|x-1|$ のグラフは

右図の太線部分 となる。

(2)　(1) のグラフと 2 直線 $y = 6$，$y = 10$ との交点の x 座標を求めると右図となる。よって

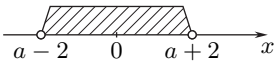
$\boldsymbol{-6 \leqq x \leqq -4,\quad 2 \leqq x \leqq 4}$



84　(1)　$|x-a|<2$ より　　$-2<x-a<2$　　$\therefore$　$\boldsymbol{a-2<x<a+2}$

(2)　$a+2>0$ であればよく

$\boldsymbol{a>-2}$

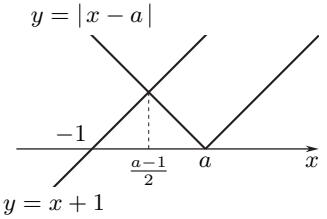


(3)　$y=-x+a$ のグラフと $y=x+1$ のグラフの交点の x 座標は

$x=\dfrac{a-1}{2}$

右図より $\dfrac{a-1}{2}<a$ であればよく

$a-1<2a$　　$\therefore$　$\boldsymbol{a>-1}$



(4)　(3) の図より

$\boldsymbol{x>\dfrac{a-1}{2}}$