1.10　ある範囲でつねに成り立つ 2 次不等式

問題

88　$0 \leqq x \leqq 2$ をみたすすべての実数 x に対して

$$x^2 - 2ax + a - 3 \leqq 0$$

が成り立つような定数 a の範囲は $\boxed{}$ である。　（千葉工業大）

89　不等式 $x^2 - 2x - 8 < 0$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{}$ である。
したがって，$-1 < x < 2$ であるすべての x に対して

$$(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x + k) > 0$$

が成り立つような定数 k の値の範囲を定めると $\boxed{}$ である。　（福岡大）

90　k を定数とし，$f(x) = x^2 - kx + k + 3$ とする。
不等式 $f(x) > 0$ の解がすべての実数であるとき，k の値の範囲は $\boxed{}$ である。

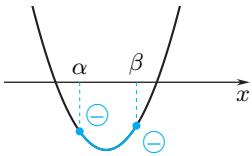
また，不等式 $f(x) < 0$ をみたす整数 x が 3 だけであるとき，k の値の範囲は $\boxed{}$ である。　（京都産業大）

チェック・チェック

88　2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが下に凸のとき，「$\alpha \leqq x \leqq \beta$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq 0$ が成り立つ」ための条件は

$$f(\alpha) \leqq 0 \text{ かつ } f(\beta) \leqq 0$$

であることです。



89　$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) < 0$ のとき，同じ $a \leqq x \leqq b$ の範囲で

$$f(x)g(x) > 0$$

となる条件は

$$a \leqq x \leqq b \text{ において } g(x) < 0$$

であることです。

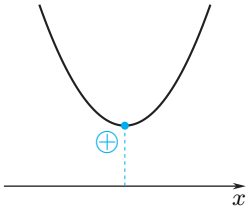
90　2 次不等式 $f(x) > 0$ がすべての実数で成立する条件は

$$(f(x) \text{ の最小値}) > 0$$

であることです。これは $y = f(x)$ のグラフが下に凸であり

$$(\text{頂点の } y \text{ 座標}) > 0 \quad (\text{または，判別式} < 0)$$

ということです。



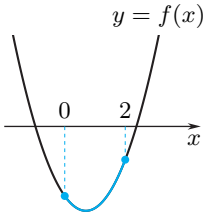
解答・解説

88 $f(x)=x^2-2ax+a-3$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸より，$0 \leqq x \leqq 2$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq 0$ となる条件は

$$f(0) \leqq 0 \text{ かつ } f(2) \leqq 0$$

である。したがって

$$\begin{cases} a-3 \leqq 0 \\ 4-4a+a-3 \leqq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3} \leqq a \leqq 3}}$$



89 2 次不等式 $x^2-2x-8<0$ を解くと

$$(x-4)(x+2)<0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{-2<x<4}}$$

したがって，$-1<x<2$ のとき $x^2-2x-8<0$ であるから，$-1<x<2$ においてつねに $(x^2-2x-8)(x^2-2x+k)>0$ が成り立つ条件は，$-1<x<2$ においてつねに

$$x^2-2x+k<0$$

が成り立つことである。

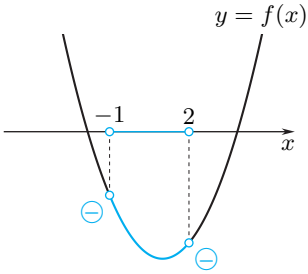
$f(x)=x^2-2x+k$ とすると，$y=f(x)$ は下に凸なので

$$f(-1) \leqq 0 \text{ かつ } f(2) \leqq 0$$

が求める条件である。したがって

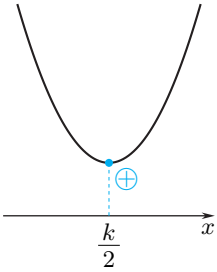
$$\begin{cases} f(-1)=3+k \leqq 0 \\ f(2)=k \leqq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{k \leqq -3}}$$



90　$f(x) = x^2 - kx + k + 3$

$$= \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k + 3$$



すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ となるのは

（$f(x)$ の最小値）> 0

のときであるから

$$f\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{k^2}{4} + k + 3 > 0$$

$$k^2 - 4k - 12 < 0$$

$$(k-6)(k+2) < 0$$

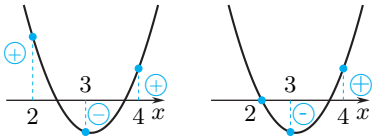
$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{-2 < k < 6}}$$

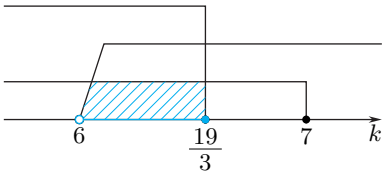
また，$f(x) < 0$ をみたす整数 x が 3 だけとなる条件は

$$f(2) \geqq 0 \text{ かつ } f(3) < 0 \text{ かつ } f(4) \geqq 0$$

であるから

$$\begin{cases} f(2) = 7 - k \geqq 0 \\ f(3) = 12 - 2k < 0 \\ f(4) = 19 - 3k \geqq 0 \end{cases}$$



したがって

$$\underline{\boldsymbol{6 < k \leqq \frac{19}{3}}}$$