2　判別式，解の配置

2.1　判別式

問題

93 (1) 2 次方程式 $x^2+(2-4k)x+k+1=0$ が正の重解をもつとする。このとき，定数 k の値は $k=$ $\boxed{}$ であり，2 次方程式の重解は $x=$ $\boxed{}$ である。　　（慶應義塾大）

(2) 2 次方程式 $4x^2+kx+3=0$ が実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。　　（福井工業大）

(3) x についての 2 つの 2 次方程式

$$x^2-ax+a^2+a-1=0$$
$$(a^2+1)x^2-2(a+1)x+1=0$$

がともに 2 つの異なる実数解をもつとき，定数 a の値の範囲は

$\boxed{} < a < \boxed{}$ である。　　（北海道工業大）

94 x についての 2 次方程式

$$x^2+(2t+k+1)x+(kt+6)=0$$

を考える。

この 2 次方程式が，$-1 \leqq t \leqq 1$ となるすべての t に対して実数解をもつためには，定数 k が $k^2+\boxed{}\,k-\boxed{} \geqq 0$ をみたすこと，すなわち $k \leqq -\boxed{}$ または $\boxed{} \leqq k$ であることが必要十分である。

また，この 2 次方程式が，$-1 \leqq t \leqq 1$ となる少なくとも 1 つの t に対して実数解をもつためには，定数 k が $k^2+\boxed{}\,k-\boxed{} \geqq 0$ をみたすこと，すなわち $k \leqq -\boxed{}$ または $\boxed{} \leqq k$ であることが必要十分である。

チェック・チェック

93 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の解は

$$x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

でした。この $\sqrt{\quad}$ の中の $\boldsymbol{b^2-4ac}$ を**判別式**といい，記号 D（Discriminant の頭文字）で表します。

実数解の個数は

$$\begin{cases} D>0 \iff \text{異なる 2 つの実数解をもつ} \\ D=0 \iff \text{1 つの実数解（重解）をもつ} \\ D<0 \iff \text{実数解をもたない（異なる 2 つの虚数解をもつ）} \end{cases}$$

です。

2 次方程式が $ax^2+2b'x+c=0$ のときは

$$D=(2b')^2-4ac=4(b'-ac)$$

より，$\dfrac{D}{4}$ の符号を調べるとよいですね。

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつとき，$D=0$ より，重解 x は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

です。したがって，正の重解をもつ条件は

$$\boldsymbol{D=0 \text{ かつ } -\frac{b}{2a}>0}$$

です。

(3) 2 つの 2 次方程式の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，ともに 2 つの実数解をもつ条件は

$$\boldsymbol{D_1>0 \text{ かつ } D_2>0}$$

です。

94 2 次方程式が実数解をもつ $\iff$ $D \geqq 0$

本問は判別式 D が t の関数となります $(D=f(t))$。すると，p.90**【ある範囲でつねに成り立つ 2 次不等式】**の問題となりますね。

解答・解説

93 (1) $x^2+(2-4k)x+k+1=0$ $\cdots\cdots①$

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(1-2k)^2-(k+1)=4k^2-5k=k(4k-5)$$

重解をもつから $D=0$ であり

$$k=0,\ \frac{5}{4}$$

① の重解は

$$x=-(1-2k)=2k-1$$

と表せるから，正の重解となるのは $k>\dfrac{1}{2}$ のときである。

よって，求める k の値は $\underline{\boldsymbol{k=\dfrac{5}{4}}}$ であり，その重解は $\underline{\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}}$ である。

(2) $4x^2+kx+3=0$ の判別式を D とすると実数解をもつ条件は

$$D=k^2-4\cdot4\cdot3=k^2-48\geqq 0$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{k\leqq -4\sqrt{3},\ k\geqq 4\sqrt{3}}}$$

(3) $\begin{cases} x^2-ax+a^2+a-1=0 \\ (a^2+1)x^2-2(a+1)x+1=0 \end{cases}$

の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とおく。ともに 2 つの異なる実数解をもつ条件は

$$D_1>0 \text{ かつ } D_2>0$$

である。

$$D_1=a^2-4(a^2+a-1)=-(3a-2)(a+2)>0$$

$$\therefore\quad -2<a<\frac{2}{3}$$

$$\frac{D_2}{4}=(a+1)^2-(a^2+1)=2a>0$$

$$\therefore\quad a>0$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{0<a<\frac{2}{3}}}$$

94 2 次方程式 $x^2+(2t+k+1)x+(kt+6)=0$ の判別式を D とすると，実数解をもつ条件は

$$D=(2t+k+1)^2-4(kt+6)\geqq 0$$
$$4t^2+4(k+1)t+(k+1)^2-4kt-24\geqq 0$$
$$4t^2+4t+k^2+2k-23\geqq 0$$

ここで，$f(t)=4t^2+4t+k^2+2k-23$ とおくと

$$f(t)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k^2+2k-24$$

$f(t)\geqq 0$ が，$-1\leqq t\leqq 1$ となるすべての t で成り立つ条件は

（$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の最小値）$\geqq 0$

である。

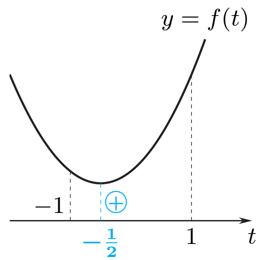
$f(t)$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小なので，最小値は $k^2+2k-24$ であるから，定数 k が

$$\underline{\boldsymbol{k^2+2k-24\geqq 0}}$$

をみたすこと，すなわち

$$(k+6)(k-4)\geqq 0$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{k\leqq -6}}\ \text{ または }\ \underline{\boldsymbol{4\leqq k}}$$

であることが必要十分である。



また，$-1\leqq t\leqq 1$ となる少なくとも 1 つの t に対して $f(t)\geqq 0$ が成り立つ条件は

（$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の最大値）$\geqq 0$

である。

$y=f(t)$ のグラフは下に凸で，軸 $t=-\dfrac{1}{2}$ より，

$f(t)$ は $t=1$ のとき最大で，最大値は

$$f(1)=k^2+2k-15$$

であるから，定数 k が

$$\underline{\boldsymbol{k^2+2k-15\geqq 0}}$$

をみたすこと，すなわち

$$(k+5)(k-3)\geqq 0$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{k\leqq -5}}\ \text{ または }\ \underline{\boldsymbol{3\leqq k}}$$

であることが必要十分である。