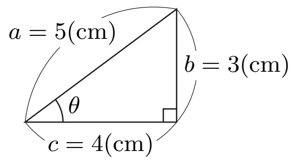
問題

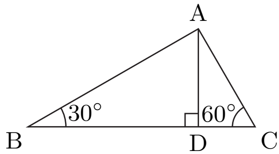
鋭角の三角比・相互関係

98 次の問いに答えよ。

(1) 右図のような直角三角形がある。θ の正弦，余弦，正接を求めよ。



(2) 右図の三角形 ABC において，頂点 A から辺 BC に下した垂線 AD の長さが 10cm のとき，辺 BC の長さを求めよ。ただし答えは有理化すること。



（広島国際学院大）

99 (1) 平坦な場所に垂直に立った木がある。この木の頂点を A，根もとを B とする。このとき木の根もとから 10m 離れた地点 O において，$\angle$AOB の大きさを測定したら 37° であった。木の高さを求めよ。ただし，$\sin 37^\circ = 0.602$，$\cos 37^\circ = 0.799$，$\tan 37^\circ = 0.754$ として計算せよ。（湘南工科大）

(2) 地上 $x$km の位置に静止している人工衛星から地球を見ると，地球の半径が $\boxed{}$ km の円板に見える。ただし，地球は半径が Rkm の球とする。

（関西大）

100 (1) θ が鋭角で $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ ならば，$\sin\theta = \boxed{}$ である。

（八戸工業大）

(2) 角 θ が鋭角で $\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，$\tan\theta = \boxed{}$ である。

（八戸工業大）

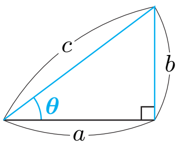
(3) $0^\circ < x < 90^\circ$ かつ $\tan x = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin x = \boxed{}$，$\cos x = \boxed{}$ である。（東京工芸大）

チェック・チェック

鋭角の三角比・相互関係

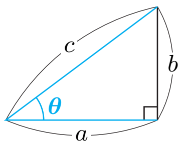
98 (1) 三角比の定義を確認しておきましょう。

正弦 ($sine$)



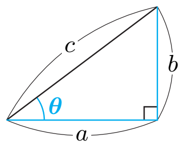
$$\sin\theta = \frac{b}{c}$$

余弦 ($cosine$)



$$\cos\theta = \frac{a}{c}$$

正接 ($tangent$)



$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

(2) BC = BD + DC として，2 つの直角三角形 ABD，ACD の中で BD，DC の長さを考えます。

99 三角測量の問題です。

(1) 直角三角形 AOB を図示してみましょう。

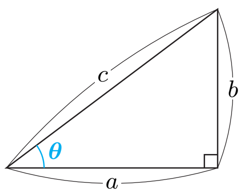
(2) 人工衛星と地球の中心を通る直線を含む平面による切り口を図示してみましょう。

100 与えられた条件から直角三角形を考えて定義に戻ってもよいですし，三角形の相互関係を用いて考えてもよいでしょう。

では，三角比の相互関係を確認しておきましょう。右下図の直角三角形において

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立ち



- $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$
- $\frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$
- $1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2$

と変形されるから

- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

という関係が成り立ちます。

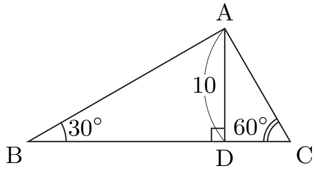
解答・解説

鋭角の三角比・相互関係

98 (1) 正弦 $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{3}{5}}$，余弦 $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{4}{5}}$，正接 $\boldsymbol{\tan\theta = \frac{3}{4}}$

(2) $\tan 30^\circ = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$ より

$$\mathrm{BD} = \frac{\mathrm{AD}}{\tan 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 10\sqrt{3}$$



また，$\tan 60^\circ = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{CD}}$ より

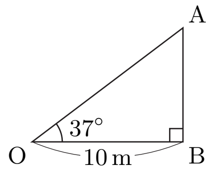
$$\mathrm{CD} = \frac{\mathrm{AD}}{\tan 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

したがって

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} + \mathrm{DC} = 10\sqrt{3} + \frac{10\sqrt{3}}{3} = \boldsymbol{\frac{40\sqrt{3}}{3}\ (\mathrm{cm})}$$

99 (1) $\tan 37^\circ = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}$ であるから，木の高さ AB は

$$\mathrm{AB} = \mathrm{OB}\cdot\tan 37^\circ = 10\cdot 0.754 = \boldsymbol{7.54\ (\mathrm{m})}$$

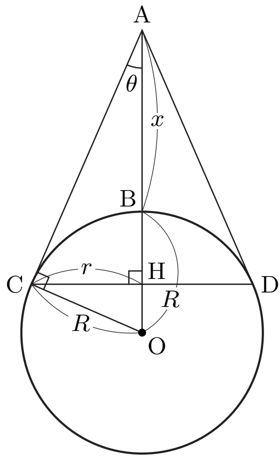


(2) 地球の中心 O と人工衛星 A を通る直線を含む平面による切り口を考える。切り口における線分 OA および円板と地球の交点をそれぞれ B および C，D とおき，OA と CD の交点を H とおく。

$\angle\mathrm{OAC} = \theta$，$\mathrm{CH} = r$ とおくと

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{AC}} = \frac{R}{\sqrt{(x+R)^2 - R^2}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{x^2 + 2xR}}$$



また，$\triangle\mathrm{OCH} \backsim \triangle\mathrm{OAC}$ より

$$\angle\mathrm{OCH} = \angle\mathrm{OAC} = \theta$$

である。このとき

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{CH}} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}$$

$$\therefore\quad \frac{R}{\sqrt{x^2 + 2xR}} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r}$$

両辺を 2 乗して

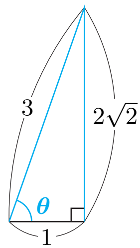
$$\frac{R^2}{x^2+2xR}=\frac{R^2-r^2}{r^2}$$

$$R^2r^2=(R^2-r^2)(x^2+2xR)$$

$$(x^2+2xR+R^2)r^2=R^2(x^2+2xR) \qquad \therefore \quad r=\underline{\boldsymbol{\frac{R\sqrt{x^2+2xR}}{x+R}}\ \textbf{(km)}}$$

100 (1) 与えられた条件より右図の直角三角形を考えて

$$\underline{\boldsymbol{\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}}}$$



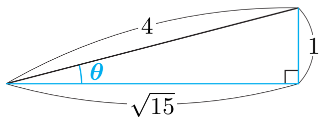
別解 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

θ が鋭角より $\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) 与えられた条件より右図の直角三角形を考えて

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{15}}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{15}}}$$



別解 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

θ が鋭角より $\cos\theta>0$ であるから

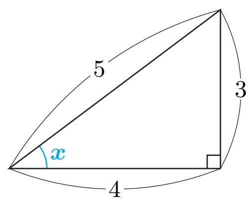
$$\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \therefore \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

あるいは，θ は鋭角より $\tan\theta>0$ であるから

$$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{16}{15}-1=\frac{1}{15} \qquad \therefore \quad \tan\theta=\frac{\sqrt{15}}{15}$$

(3) 与えられた条件より右図の直角三角形を考えて

$$\underline{\boldsymbol{\sin x=\frac{3}{5},\quad \cos x=\frac{4}{5}}}$$



別解 $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$ より

$$\cos^2 x=\frac{16}{25}$$

$0^\circ<x<90^\circ$ なので $\cos x>0$ $\qquad \therefore \quad \cos x=\frac{4}{5}$

$\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$ より

$$\sin x=\tan x\cos x=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$$