問題

式の値

107 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ のとき

$\sin\theta\cos\theta = \boxed{}$，　$\sin^4\theta + \cos^4\theta = \boxed{}$

である。　（北海道工業大）

108 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ （ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ ）であるとき

$\sin\theta = \boxed{}$

である。　（拓殖大）

109 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき

$\sin\theta\cos\theta = \boxed{}$

であり，$\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \boxed{}$ である。　（足利工業大）

110 $0° \leqq A \leqq 180°$ のとき $\tan A + \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{10}{3}$ が成り立つとする。
このとき

$\sin A + \cos A$ の値は $\boxed{}$

であり

$\sin A - \cos A$ の値は $\boxed{}$

である。　（日本工業大）

チェック・チェック

式の値

107 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗すると $\sin\theta\cos\theta$ が得られます。
$\sin^4\theta+\cos^4\theta$ は $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式なので，**基本対称式の $\sin\theta+\cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ で表す**ことができます。

108 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ と合わせて考えてみましょう。$\sin\theta$，$\cos\theta$ についての連立方程式を解くことになります。
また，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の和と積が得られれば，解と係数の関係（数学 II）も利用できます。

109 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗してみましょう。$\sin\theta\cos\theta$ が得られます。

$$\tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

ですから，これも $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の対称式です。

110 $\tan A+\dfrac{1}{\tan A}$ も $\sin A+\cos A$ も $\sin A$ と $\cos A$ の対称式ですが，
$\sin A-\cos A$ は対称式ではありません。しかし，**2 乗すると対称式** です。

また，$\tan A+\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{10}{3}$ から $\sin A\cos A$ の値を得ることができます。
$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ と合わせて，$(\sin A\pm\cos A)^2$ の値を求めましょう。
$\sin A\pm\cos A$ の符号をおさえることも大切です。

解答・解説

式の値

107 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 2$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 2 \qquad \therefore \quad \sin\theta\cos\theta = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

また

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 1^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{2}}}$$

108 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ より

$$\cos\theta = \frac{1}{3} - \sin\theta$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に $\cos\theta = \dfrac{1}{3} - \sin\theta$ を代入し，**$\cos\theta$ を消去**すると

$$\sin^2\theta + \left(\frac{1}{3} - \sin\theta\right)^2 = 1 \qquad \therefore \quad 2\sin^2\theta - \frac{2}{3}\sin\theta - \frac{8}{9} = 0$$

$\sin\theta = t$ とおくと

$$9t^2 - 3t - 4 = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 + 4\cdot 9\cdot 4}}{18} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{6}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$0 \leqq t \leqq 1$ であるから

$$\sin\theta = t = \underline{\boldsymbol{\frac{1 + \sqrt{17}}{6}}}$$

別解 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ の両辺を 2 乗して

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9}$$

$\sin^2\theta + \cos^2 = 1$ より

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9} \qquad \therefore \quad \sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{9}$$

よって，解と係数の関係（数学II）より，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を解とする 2 次方程式は

$$t^2 - \frac{1}{3}t - \frac{4}{9} = 0 \qquad \therefore \quad 9t^2 - 3t - 4 = 0$$

以下，同じ。

109 $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4} \qquad \therefore \quad \sin\theta\cos\theta = \underline{\boldsymbol{-\frac{3}{8}}}$$

また

$$\begin{aligned}
\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} &= \left(\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}\right)^2 - 2\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta} \\
&= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 - 2 = \left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}\right)^2 - 2 \\
&= \left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2 - 2 = \left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 2 = \underline{\boldsymbol{\frac{46}{9}}}
\end{aligned}$$

110 $$\begin{aligned}
\tan A + \frac{1}{\tan A} &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A\sin A} \\
&= \frac{1}{\sin A\cos A}
\end{aligned}$$

よって $\tan A + \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{10}{3}$ より

$$\frac{1}{\sin A\cos A} = \frac{10}{3} \qquad \therefore \quad \sin A\cos A = \frac{3}{10}$$

このとき

$$\begin{aligned}
(\sin A + \cos A)^2 &= \sin^2 A + 2\sin A\cos A + \cos^2 A \\
&= 1 + 2\cdot\frac{3}{10} = \frac{8}{5} \\
(\sin A - \cos A)^2 &= \sin^2 A - 2\sin A\cos A + \cos^2 A \\
&= 1 - 2\cdot\frac{3}{10} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

$0^\circ \leqq A \leqq 180^\circ$ かつ $\sin A\cos A = \dfrac{3}{10} > 0$ なので

$$\sin A > 0,\quad \cos A > 0$$

すなわち，$\sin A + \cos A > 0$ なので

$$\sin A + \cos A = \sqrt{\frac{8}{5}} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{10}}{5}}}$$

$$\sin A - \cos A = \pm\sqrt{\frac{2}{5}} = \underline{\boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{10}}{5}}}$$