問題

方程式

111 以下の方程式をみたす x を求めよ。ただし，$90^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする。

$6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$　（専修大）

112 $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$ をみたす θ の値を求めよ。
ただし，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ とする。　（滋賀大，手塚山大）

113 $0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ の条件で，次の方程式をみたす θ は $\boxed{}$ である。

$\cos^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = 1$　（立教大　改）

114 連立方程式 $\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{2} \\ \sin x \cos y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ について，次の問いに答えよ。

ただし，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$，$0^\circ \leqq y \leqq 180^\circ$ とする。

(1) $\sin x + \cos y$ の値を求めよ。　(2) x を求めよ。　(3) y を求めよ。

（産能大）

チェック・チェック

方程式

111 $\cos x$ の方程式なので，$\cos x = t$ と置換すれば，t の 2 次方程式です。なお，置換したときには，**置き換えた t の値の範囲に注意**しましょう。

112 $\cos\theta$ と $\sin\theta$ で表されていますから，どちらか一方に統一します。本問は

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

と置換することによって，**$\sin\theta$ のみの方程式**となります。

113 上と同じように，$\sin\theta$ または $\cos\theta$ で表そうとすると $\sin\theta\cos\theta$ の項がじゃまですね。両辺を $\cos^2\theta$ でわってみましょう。**$\tan\theta$ のみの方程式**となります。ただし，わるときには（分母）$\neq 0$ のチェックを忘れないようにしましょう。

114 $\cos^2 x + \sin^2 y$ は **$\sin x$ と $\cos y$ で表す**ことができます。この変形により，本問の連立方程式は $\sin x$ と $\cos y$ についての対称式となりますね。

解答・解説

方程式

111 $90^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より，$-1 \leqq \cos x \leqq 0$ であり，$\cos x = t$ とおくと

$$6t^2 + t - 1 = 0 \qquad (3t-1)(2t+1) = 0$$

$-1 \leqq t \leqq 0$ より

$$t = \cos x = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{x = 120^\circ}}$$

112 $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$ より

$$2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 3 = 0$$

$$\therefore \quad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$\sin\theta = t$ とおくと，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから

$$0 < \sin\theta \leqq 1 \qquad \therefore \quad 0 < t \leqq 1$$

したがって，① より

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \qquad (2t-1)(t-1) = 0 \qquad \therefore \quad t = \sin\theta = \frac{1}{2},\ 1$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$\underline{\boldsymbol{\theta = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ}}$

113 $\cos\theta = 0$ のときは成立しないので，$\cos\theta \neq 0$ であり，与式の両辺を $\cos^2\theta$ でわると

$$1 + \sqrt{3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$1 + \sqrt{3}\tan\theta = 1 + \tan^2\theta \qquad \therefore \quad \tan\theta = 0,\ \sqrt{3}$$

$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ$ より　$\underline{\boldsymbol{\theta = 0^\circ,\ 60^\circ}}$

114 (1)　$\cos^2 x + \sin^2 y = (1 - \sin^2 x) + (1 - \cos^2 y) = 2 - (\sin^2 x + \cos^2 y)$

なので，$\cos^2 x + \sin^2 y = \dfrac{3}{2}$ を変形すると

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}$$

したがって

$$(\sin x + \cos y)^2 = \sin^2 x + \cos^2 y + 2\sin x \cos y = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

ここで，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ なので，$\sin x \geqq 0$ であり，$\sin x \cos y > 0$ であることから，$\sin x > 0$，$\cos y > 0$ となり

$$\sin x + \cos y > 0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{\sin x + \cos y = 1}}$$

(2)　$\sin x + \cos y = 1$ かつ $\sin x \cos y = \dfrac{1}{4}$ なので

$$\frac{1}{4} = \sin x(1 - \sin x)$$

$$\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4} = 0 \qquad \therefore \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より　　$\underline{\boldsymbol{x = 30^\circ,\ 150^\circ}}$

(3)　(2) より　　$\cos y = 1 - \sin x = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq y \leqq 180^\circ$ より　　$\underline{\boldsymbol{y = 60^\circ}}$