問題

最大・最小

118 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\cos^2\theta + 2\sin\theta + \sin^2\theta$ の最大値は $\boxed{}$，また最小値は $\boxed{}$ である。（東海大）

119 $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ で $f(\theta) = \tan^2\theta + 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$ の最小値を求める。次の $\boxed{}$ に当てはまる数や式をかけ。

サインとコサインの関係より

$$\boxed{} + \boxed{} = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を $\cos^2\theta$ で割ることによって

$$\boxed{} + \boxed{} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \cdots\cdots ②$$

が得られる。与式より

$$f(\theta) = \tan^2\theta + 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$$

サインとコサインの関係 ① を使って

$$f(\theta) = 2 + \boxed{} + \tan^2\theta \quad \cdots\cdots ③$$

②の関係を使って

$$f(\theta) = 1 + \cos^2\theta + \boxed{} = \left(\cos\theta - \boxed{}\right)^2 + 3$$

よって，$\boxed{} = 1$ のとき，すなわち，$\theta = \boxed{}$ のとき，$f(\theta)$ の最小値は $\boxed{}$ となる。（徳島文理大）

120 関数 $f(x) = \sin^2 x + a\cos x + 1$ について，$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする。

(1) $a = 1$ のとき，$f(x)$ の最大値は $\boxed{}$，そのときの x の値は $\boxed{}^\circ$ である。

(2) a が $0 < a < 2$ の値であるとき，$f(x)$ の最大値が $\dfrac{5}{2}$ となるような a の値は $\boxed{}$ である。

(3) a が $a \geqq 2$ の値であるとき，$f(x)$ の最大値は $\boxed{}$，そのときの x の値は $\boxed{}^\circ$ である。また，$f(x)$ の最小値は $\boxed{}$，そのときの x の値は $\boxed{}^\circ$ である。（帝京大）

チェック・チェック

最大・最小

118 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ を利用して，与式を $\sin\theta$ についての 2 次式とみます。
$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ ですから，$\sin\theta$ は $0 \leqq \sin\theta \leqq 1$ の範囲で動きます。

119 親切な誘導に従い，$f(\theta)$ を $\cos\theta$ についての関数として変形します。
問題文の関係式 ①，② は誘導がなくても頭に入っていなければならない等式です。

120 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ を利用すると，$f(x)$ は $\cos x$ についての 2 次式となります。$\cos x = t$ とおくと，t についての 2 次関数の最大・最小問題となります。

$0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ です。定義域と軸の位置に注意しながらグラフをかき，最大値，最小値を求めましょう。

解答・解説

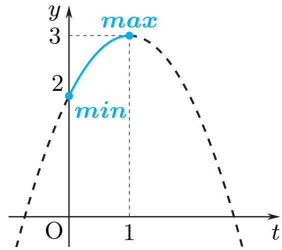
最大・最小

118 $\sin x = t$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より

$$0 \leqq t \leqq 1$$

であり

$$\begin{aligned} & 2\cos^2\theta + 2\sin\theta + \sin^2\theta \\ = & 2(1-\sin^2\theta) + 2\sin\theta + \sin^2\theta \\ = & -t^2 + 2t + 2 = -(t-1)^2 + 3 \end{aligned}$$



$0 \leqq t \leqq 1$ より

$t = 1$ すなわち $x = 90^\circ$ のとき，最大値は $\underline{\mathbf{3}}$

$t = 0$ すなわち $x = 0^\circ,\ 180^\circ$ のとき，最小値は $\underline{\mathbf{2}}$

119 $0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ で $f(\theta) = \tan^2\theta + 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$ の最小値を求める。

サインとコサインの関係より

$$\underline{\boldsymbol{\sin^2\theta}} + \underline{\boldsymbol{\cos^2\theta}} = 1 \quad \cdots\cdots ①$$

次に，両辺を $\cos^2\theta$ でわることによって

$$\underline{\mathbf{1}} + \underline{\boldsymbol{\tan^2\theta}} = \frac{1}{\cos^2\theta} \quad \cdots\cdots ②$$

が得られる。与式より

$$f(\theta) = \tan^2\theta + 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta$$

サインとコサインの関係 ① を使って

$$f(\theta) = \tan^2\theta + 2(1-\cos^2\theta) + 3\cos^2\theta = 2 + \underline{\boldsymbol{\cos^2\theta}} + \tan^2\theta \quad \cdots\cdots ③$$

②の関係を使って

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 1 + \cos^2\theta + (1 + \tan^2\theta) \\ &= 1 + \cos^2\theta + \underline{\boldsymbol{\frac{1}{\cos^2\theta}}} = \left(\cos\theta - \underline{\boldsymbol{\frac{1}{\cos\theta}}}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

よって，$\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta} = 0$ のとき，$f(\theta)$ は最小となる。このとき

$$\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta} = 0 \qquad \therefore \quad \cos^2\theta = 1$$

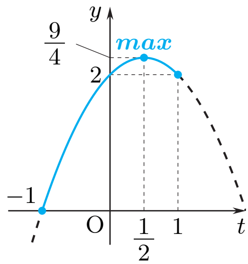
$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ から，$\underline{\boldsymbol{\cos\theta = 1}}$ すなわち $\underline{\boldsymbol{\theta = 0^\circ}}$ のとき，$f(\theta)$ は最小値 $\underline{\mathbf{3}}$ となる。

120 $f(x) = \sin^2 x + a\cos x + 1 = (1 - \cos^2 x) + a\cos x + 1$
$$= -\cos^2 x + a\cos x + 2$$

$\cos x = t$ とおくと，$0° \leqq x \leqq 180°$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ であり
$$f(x) = -t^2 + at + 2 = -\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 2 = g(t)$$

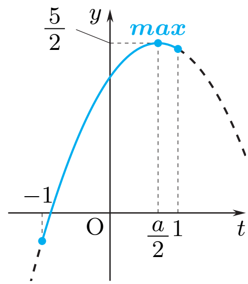
(1) $a = 1$ のとき
$$g(t) = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$
$-1 \leqq t \leqq 1$ より，$g(t)$ すなわち $f(x)$ について

最大値は $g\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\mathbf{\frac{9}{4}}}$



$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より，$t = \frac{1}{2}$ のとき
$$\cos x = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad x = \underline{\mathbf{60}}°$$

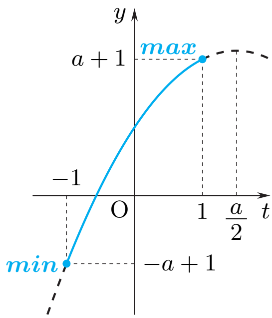
(2) $0 < a < 2$ のとき，軸の方程式 $t = \frac{a}{2}$ は $0 < \frac{a}{2} < 1$ をみたすから，$-1 \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の最大値は $g\left(\frac{a}{2}\right)$ である。よって
$$\frac{a^2}{4} + 2 = \frac{5}{2}$$
$$\therefore \quad a = \underline{\mathbf{\sqrt{2}}} \quad (\because \quad 0 < a < 2)$$



(3) $a \geqq 2$ のとき，$y = g(t)$ のグラフの軸の方程式 $t = \frac{a}{2}$ は $\frac{a}{2} \geqq 1$ をみたすから，$-1 \leqq t \leqq 1$ における $g(t)$ の

最大値は $g(1) = a + 1$
最小値は $g(-1) = -a + 1$

である。$0° \leqq \theta \leqq 180°$ より，$t = 1$ のとき
$$\cos x = 1 \qquad \therefore \quad x = 0°$$
また，$t = -1$ のとき
$$\cos x = -1 \qquad \therefore \quad x = 180°$$
だから，$f(x)$ の



最大値は $\underline{\mathbf{a + 1}}$，そのときの x の値は $\underline{\mathbf{0}}°$

最小値は $\underline{\mathbf{-a + 1}}$，そのときの x の値は $\underline{\mathbf{180}}°$