問題

正弦定理

125 正弦定理 $a = 2R\sin A$（R は外接円の半径）が成り立つことを鋭角三角形の場合について証明せよ。（杏林大）

126 (1) $\triangle$ABC において $\angle$A $= 60°$，BC $= 2$ のとき，外接円の半径を求めよ。（法政大）

(2) 半径 4 の円に内接する三角形 ABC で $4\sin(A+B)\sin C = 3$ のとき，$C = \boxed{}$° または，$\boxed{}$° であり，AB $= \boxed{}$ である。（西日本工業大）

(3) 三角形 ABC において，$\angle$B $= 30°$，$\angle$C $= 105°$，辺 BC の長さが 10 のとき，辺 AC の長さを求めよ。（東京電機大）

127 $\triangle$ABC において，$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$ とする。最大角を θ とするとき，$\cos\theta = \boxed{}$ である。（日本工業大）

チェック・チェック

正弦定理

125 **円周角の定理**を用いて直角三角形をつくります。鈍角のときの証明は教科書を見てください。

126 (1) 外接円の半径を求めるには，まずは正弦定理です。

(2) つまり，$\triangle$ABC の外接円の半径は 4 です。また，三角形の内角の和 $A+B+C$ は $180°$ でしたね。

(3) 2 角がわかれば，残りの 1 角がわかります。

127 正弦定理を用いれば

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = a : b : c$$

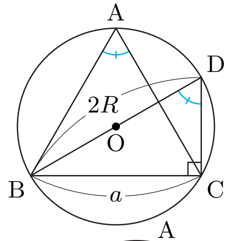
であり，**角についての条件式を辺についての条件式に書き直す**ことができます。

解答・解説

正弦定理

125 右図のように，B を通る直径 BD を引き，直角三角形 DBC をつくる。**円周角の定理**より，∠A ＝ ∠D であるから

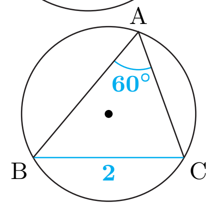
$$a = 2R\sin D = 2R\sin A$$　　（証終）



126 (1) 外接円の半径を R とすると，**正弦定理**より

$$\frac{\text{BC}}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore\quad R = \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{BC}}{\sin 60^\circ} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$$



(2) $\boldsymbol{A+B+C=180^\circ}$ だから

$$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$$4\sin(A+B)\sin C = 3 \qquad \therefore\quad \sin^2 C = \frac{3}{4}$$

$0^\circ < C < 180^\circ$ より　　$0 < \sin C \leqq 1$

よって　　$\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　$\therefore\quad C = \underline{\mathbf{60}}^\circ$ または $\underline{\mathbf{120}}^\circ$

また，△ABC の外接円の半径を R とすると $R=4$ だから，正弦定理より

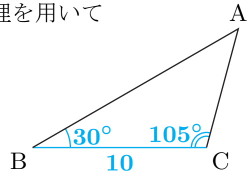
$$\frac{\text{AB}}{\sin C} = 2R \qquad \therefore\quad \text{AB} = 2R\sin C = 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\boldsymbol{4\sqrt{3}}}$$

(3) $\boldsymbol{\angle\text{A} = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ)} = 45^\circ$ より，正弦定理を用いて

$$\frac{\text{AC}}{\sin 30^\circ} = \frac{\text{BC}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore\quad \text{AC} = \text{BC}\cdot\frac{1}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 30^\circ = 10\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \underline{\boldsymbol{5\sqrt{2}}}$$



127 △ABC の外接円の半径を R とする。

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ より

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

なので，$\sin A : \sin B : \sin C = 5:6:7$ のとき

$$a:b:c = 5:6:7$$

したがって，$t>0$ として $a=5t$，$b=6t$，$c=7t$ と表せる。

最大辺 c の対角 C が最大角 θ なので，余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{25t^2+36t^2-49t^2}{2\cdot 5t\cdot 6t} = \underline{\boldsymbol{\frac{1}{5}}}$$