問題

三角形の形状決定

134 三角形 ABC において，BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とする。次の等式が成り立つときこの三角形はどのような形状か。

(1) $a = 2b\cos C$

(2) $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$

(3) $a^2 = b^2 + c^2 + bc$　（広島女学院大）

135 △ABC において，∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ A，B，C とし，辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする。次の等式が成り立つとき，この三角形はどのような三角形か。

(1) $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$

(2) $a\cos B - b\cos A = c$　（松山大　改）

136 △ABC において $a =$ BC，$b =$ CA，$c =$ AB と表すとき

$$\frac{\tan A}{a^2} = \frac{\tan B}{b^2}$$

が成り立つ △ABC はどのような三角形か。　（横浜国立大　改）

チェック・チェック

三角形の形状決定

134 三角形の形状決定問題は，正弦定理や余弦定理を用いて，辺の長さ a，b，c のみの関係式，または，角の大きさ A，B，C のみの関係式をつくるのがポイントです。角の関係式にもち込むと，三角比に関するいろいろな公式を使うことが多く，**辺のみの関係式**をつくった方がラクな場合が多いです。

(1) 余弦定理より

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

を代入すれば，辺の長さ a，b，c のみの関係式が得られます。

(2) 正弦定理より

$$\sin A = \frac{a}{2R},\quad \sin B = \frac{b}{2R},\quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

を代入すれば，辺のみの関係式が得られます。

(3) 最初から 3 辺の長さのみの関係式で，辺のみの関係式として，これ以上変形できそうにありません。そこで，左辺の a^2 を余弦定理を利用して別の形で表してみましょう。

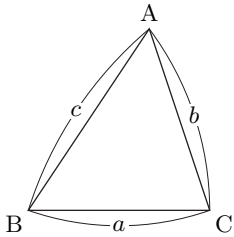
135 いずれも cos があります。余弦定理を利用して辺の長さ a，b，c の関係式で表してみましょう。

136 tan は cos と sin で表すことができます。余弦定理と正弦定理を利用して辺の長さ a，b，c の関係式で表してみましょう。

解答・解説

三角形の形状決定

134 (1) 余弦定理より



$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

これを用いて $a = 2b\cos C$ を変形すると

$$a = 2b \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$a^2 = a^2+b^2-c^2 \qquad \therefore \quad b^2 = c^2$$

$b>0$，$c>0$ より　　$b=c$

よって，**$b=c$ の二等辺三角形**

(2) R を △ABC の外接円の半径として正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

これを用いて $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ を変形すると

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \qquad \therefore \quad a^2 = b^2+c^2$$

よって，**$\angle A = 90^\circ$ の直角三角形**

(3) 余弦定理より

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$

これを用いて $a^2 = b^2+c^2+bc$ を変形すると

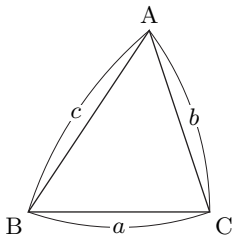
$$b^2+c^2-2bc\cos A = b^2+c^2+bc \qquad \therefore \quad bc(1+2\cos A) = 0$$

$b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ より

$$1+2\cos A = 0 \qquad \therefore \quad \cos A = -\frac{1}{2}$$

よって，**$\angle A = 120^\circ$ の三角形**

135 (1) $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}$ より　　$a\cos B=b\cos A$



さらに，余弦定理を適用すると

$$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\qquad\therefore\quad a^2=b^2$$

$a>0$，$b>0$ より　　$a=b$

よって，**$a=b$ の二等辺三角形**

(2) $a\cos B-b\cos A=c$ で左辺に余弦定理を適用すると

$$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=c$$

$$a^2+c^2-b^2-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$$

$$\therefore\quad a^2=b^2+c^2$$

よって，**$\angle A=90^\circ$ の直角三角形**

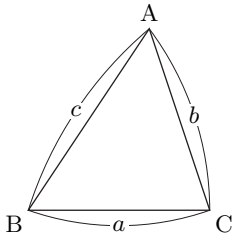
136 外接円の半径を R とし，正弦定理，余弦定理を適用すると

$$\frac{\tan A}{a^2}=\frac{\sin A}{a^2\cos A}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{2bc}{b^2+c^2-a^2}=\frac{bc}{a(b^2+c^2-a^2)R}$$

同様にして

$$\frac{\tan B}{b^2}=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{2ac}{a^2+c^2-b^2}=\frac{ca}{b(a^2+c^2-b^2)R}$$

が成り立つ。したがって



$$\frac{\tan A}{a^2}=\frac{\tan B}{b^2}$$

$$\frac{bc}{a(b^2+c^2-a^2)R}=\frac{ca}{b(a^2+c^2-b^2)R}$$

$$\frac{b}{a(b^2+c^2-a^2)}=\frac{a}{b(a^2+c^2-b^2)}$$

$$b^2(a^2+c^2-b^2)=a^2(b^2+c^2-a^2)$$

c について整理して

$$(b^2-a^2)c^2-(b^4-a^4)=0$$

$$(b^2-a^2)c^2-(b^2+a^2)(b^2-a^2)=0$$

$$(b+a)(b-a)\{c^2-(b^2+a^2)\}=0$$

$b+a>0$ なので

$$b=a\quad\text{または}\quad c^2=a^2+b^2$$

つまり，**AC = BC の二等辺三角形** であるか，または **$\angle C=90^\circ$ の直角三角形** である。