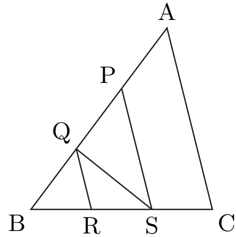
問題

相似形の面積比

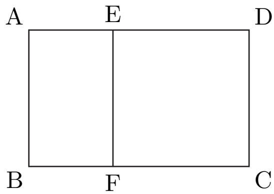
141 図の三角形 ABC において，辺 AB を 3 等分する点をそれぞれ P，Q，辺 BC を 3 等分する点をそれぞれ R，S とする。このとき，△BQR，△PQS，△ABC の面積比は $\boxed{}$: $\boxed{}$: $\boxed{}$ である。 （湘南工科大）



142 右図において，長方形 ABCD と長方形 AEFB が相似であり，四角形 CDEF が正方形であるとする。長方形 AEFB の面積を S_1，長方形 ABCD の面積を S_2 とするとき

$$AB : BC = 1 : \boxed{},$$
$$S_1 : S_2 = 1 : \boxed{}$$

である。 （北海道工業大）



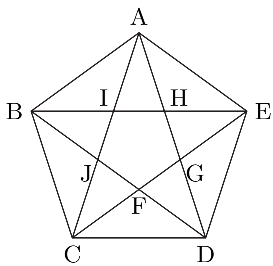
143 1 つの円に内接する正六角形の面積を S，外接する正六角形の面積を T とする。このとき，$S : T$ を求めよ。

144 図のように，正五角形 ABCDE の対角線の交点をそれぞれ F，G，H，I，J とする。

(1) ∠ABH と ∠AHB の大きさの比は，
$\angle ABH : \angle AHB = 1 : \boxed{}$ である。

(2) 線分 IH と線分 AI の長さの比は，
$IH : AI = 1 : \boxed{}$ である。

(3) 五角形 FGHIJ と正五角形 ABCDE の面積の比は，五角形 FGHIJ : 正五角形 ABCDE = $1 : \boxed{}$ である。



チェック・チェック

相似形の面積比

141 相似な平面図形 A，B の**相似比が $a:b$** であるとき，A，B の**面積比は $a^2:b^2$** です。

142 長方形 ABCD と長方形 AEFB が相似であることから

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{AE}:\mathrm{AB}$$

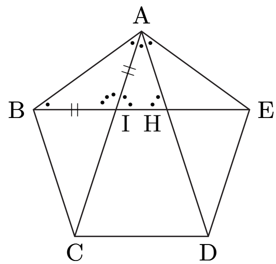
であり，四角形 CDEF が正方形であることより

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}-\mathrm{AE}$$

です。AE を消去することにより AB と BC の関係式が得られます。$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AE}=x$ としても一般性は失われません。

143 正六角形は中心 O を 1 つの頂点とする 6 個の正三角形に分割されます。各正六角形の一辺の長さの比が相似比であり，2 つの正六角形の**面積比**は，**(相似比)^2** となります。

144 正五角形の中にはいくつかの相似な三角形があります。



(1) 正五角形の内角の総和は △ABC，△ACD，△AED の内角の和に等しいから

$$\angle\mathrm{BAE}=\frac{180^\circ\times 3}{5}=36^\circ\times 3=108^\circ$$

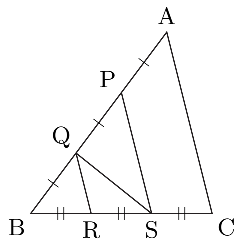
36° を●で表すと，△ABH 内の角は右図のようになります。

(2) $\triangle\mathrm{AIH}\backsim\triangle\mathrm{BAH}$ であり，△IAB が二等辺三角形であることに着目します。

解答・解説

相似形の面積比

141 $\triangle QBR \backsim \triangle PBS \backsim \triangle ABC$ であり，



相似比は $1:2:3$ だから

$$\triangle QBR : \triangle PBS : \triangle ABC = 1^2 : 2^2 : 3^2$$

また，R は線分 BS の中点だから

$$\triangle QBR : \triangle QRS = 1:1$$

よって，$\triangle ABC$ の面積を 9 とすると

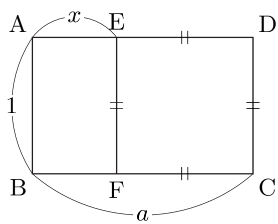
$$\triangle QBR = 1$$

$$\begin{aligned}\triangle PQS &= \triangle PBS - \triangle QBR - \triangle QRS \\ &= 4 - 1 - 1 = 2\end{aligned}$$

よって，求める面積比は

$$\triangle BQR : \triangle PQS : \triangle ABC = \underline{\mathbf{1}} : \underline{\mathbf{2}} : \underline{\mathbf{9}}$$

142 $AB = 1$，$BC = a$，$AE = x$ とおく。



長方形 ABCD と長方形 AEFB が相似であることから

$$a : 1 = 1 : x \qquad \therefore \quad ax = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

また，$BF + FC = BC$ より

$$x + 1 = a \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より x を消去すると

$$a(a-1) = 1$$

$$a^2 - a - 1 = 0$$

$a > 0$ より

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

したがって

$$AB : BC = 1 : a = 1 : \underline{\boldsymbol{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

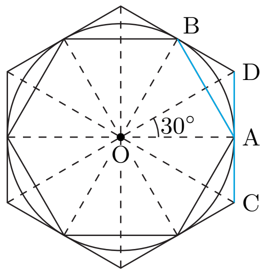
であり，長方形 ABCD と長方形 AEFB が相似であることから

$$S_1 : S_2 = 1^2 : a^2 = 1 : \underline{\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$$

143 図のように O，A，B，C，D をとる。円の半径 OA の長さを a とすると，内接正六角形と外接正六角形の辺の比は

$$\begin{aligned} AB : CD &= AB : 2AD = a : 2a\tan 30^\circ \\ &= 1 : \left(2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \sqrt{3} : 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad S : T = (\sqrt{3})^2 : 2^2 = \underline{\mathbf{3 : 4}}$$



144 正五角形 ABCDE の内角の総和は △ABC，△ACD，△AED の内角の総和 $180^\circ \times 3$ に等しいから

$$\angle BAE = \frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ$$

$$\angle BAI = \angle ABI = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\angle AIH = \angle AHI = 72^\circ$$

である。

(1) $\angle ABH : \angle AHB = 36^\circ : 72^\circ = \underline{\mathbf{1 : 2}}$

(2) $IH = 1$，$AI = x$ とおくと

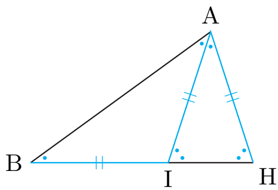
$\triangle AIH \backsim \triangle BAH$

より，$AH = AI = BI$ であり

$IH : AH = AH : BH$

$1 : x = x : (x+1)$

$x^2 - x - 1 = 0 \qquad \therefore \quad x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because \quad x > 0)$



したがって

$$IH : AI = \underline{\mathbf{1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

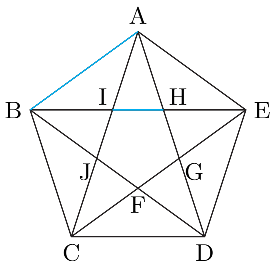
(3) （五角形 FGHIJ）$\backsim$（五角形 ABCDE）

であり，$IH = 1$ のとき

$$AB = BH = 1 + x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

なので，求める面積比は

$$1^2 : \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \underline{\mathbf{1 : \frac{7+3\sqrt{5}}{2}}}$$



問題

空間図形への応用

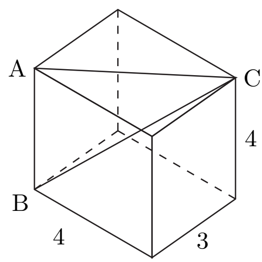
145 あるビルの高さを求めるために，壁面から 30m 離れた地点で屋上を見上げる角を測ったところ，57° であった。目の高さを 1m とするとき，このビルの高さは $\boxed{}$ m である。また，その他の条件は一切同じで，見上げる角が 67° であったとき，ビルの高さは $\boxed{}$ m である。ただし，見上げる人とビルは，ともに水平な土地にたっている。$\tan 57^\circ = 1.5399$，$\tan 67^\circ = 2.3559$ として，答は小数第 1 位で四捨五入せよ。（武蔵大）

146 地点 A から真北の方向の地点 B に塔がたっている。A から塔の先端を見上げる仰角は 60° である。A から真東に 100m 移動した地点 C から塔の先端を見上げる仰角は 30° である。このとき，AB 間の距離は $\boxed{}$ m であり，この塔の高さは $\boxed{}$ m である。（日本大）

147 底辺の縦，横がそれぞれ 3cm，4cm，高さが 4cm の直方体で，三角形 ABC を考える。三角形 ABC の面積は $\boxed{}$ である。また $\angle ABC = \alpha$ とすると

$$\sin\alpha = \boxed{},\quad \cos\alpha = \boxed{}$$

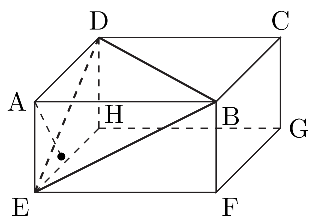
である。（桐蔭横浜大）



148 図の直方体 ABCD − EFGH において，

$$AB = 3,\ AD = 2,\ AE = 1$$

とし，$\angle DEB = \theta$ とおく。このとき，次の各問に答えよ。



(1) BD，DE，EB の長さを求めよ。

(2) $\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 三角形 BDE の面積を求めよ。

(4) A から三角形 BDE に下ろした垂線の長さを求めよ。（北海道工業大）