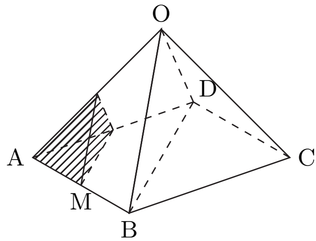
問題

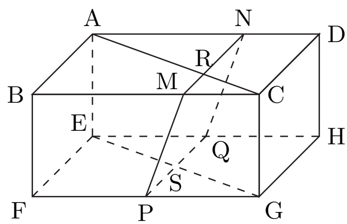
空間図形の体積

149 $AB=AC=AD=3$，$BC=3$，$CD=2$，$DB=\sqrt{5}$ の三角錐 ABCD において，△BCD に外接する円の半径は $\boxed{}$ であり，この三角錐 ABCD の体積は $\boxed{}$ である。（中京大）

150 図のような正四角すい OABCD があり，$OA=OB=OC=OD=AB=BC=CD=DA=4\,\text{cm}$ で，点 M は辺 AB の中点である。図のように，正四角すい OABCD を，点 M を通り三角形 OBD に平行な平面で切ってできる 2 つの立体のうち，頂点 A を含む立体の体積は何 cm^3 か。



151 次の図のように，$AB=3\,\text{cm}$，$AD=6\,\text{cm}$，$AE=3\,\text{cm}$ の直方体 ABCD − EFGH がある。辺 BC，AD をそれぞれ 2 : 1 に分ける点を M，N とし，辺 FG，EH の中点を，それぞれ P，Q とする。対角線 AC と線分 MN の交点を R，対角線 EG と線分 PQ の交点を S とするとき，次の (1)，(2) の問いに答えなさい。



(1) 線分 MR の長さを求めなさい。

(2) 立体 MCR − PGS の体積を求めなさい。

チェック・チェック

空間図形の体積

149 三角形の外接円の半径は正弦定理を利用して求めることができます。A から底面 BCD に下ろした垂線の足は，AB = AC = AD ならば，三角形 BCD の外心と一致します。

150 相似な立体図形 A，B の**相似比が $\boldsymbol{a : b}$** であるとき，A，B の**体積比は $\boldsymbol{a^3 : b^3}$** です。本問では，求める立体（四面体）の体積を V とおくと

$$V = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times (\text{四面体 OABD の体積})$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}(\text{正四角錐 OABCD の体積})$$

です。

151 (1) △CMR ∽ △CBA（相似比 1 : 3）です。

(2) GC，SR，PM を延長して三角錐をつくりましょう。

解答・解説

空間図形の体積

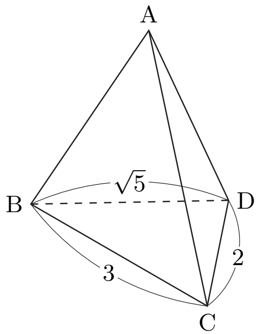
149 $\angle\mathrm{BCD}=\theta$ とおき，三角形 BCD に余弦定理を用いると

$$\cos\theta=\frac{3^2+2^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{2}{3}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\sin\theta>0$ だから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}$$



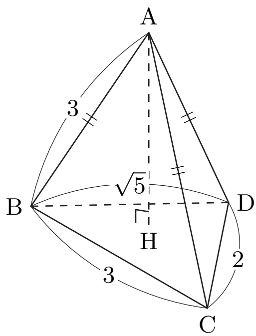
三角形 BCD の外接円の半径を R とする。三角形 BCD に正弦定理を用いると

$$2R=\frac{\mathrm{BD}}{\sin\theta}\qquad\therefore\quad R=\frac{\sqrt{5}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=\underline{\boldsymbol{\frac{3}{2}}}$$

A から三角形 BCD に垂線 AH を引く。このとき，三平方の定理より

$$\begin{cases}\mathrm{BH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{9-\mathrm{AH}^2}\\ \mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{9-\mathrm{AH}^2}\\ \mathrm{DH}=\sqrt{\mathrm{AD}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{9-\mathrm{AH}^2}\end{cases}$$

$$\therefore\quad \mathrm{BH}=\mathrm{CH}=\mathrm{DH}$$



よって，H は三角形 BCD の外心と一致するから

$$\mathrm{BH}=R=\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

したがって，三角錐 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{2}}}$$

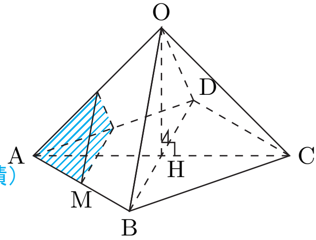
別解 三角形 BCD について，$\mathrm{BC}^2=\mathrm{CD}^2+\mathrm{DB}^2$ が成り立つから，$\angle\mathrm{CDB}=90^\circ$ である。このことに気づけば，三角形 BCD の外接円は B，C を直径の両端とする円であり，R は

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2}=\frac{3}{2}$$

と求めることができる。

150 求める立体は四面体 OABD と相似であり，

相似比は $\frac{1}{2}$ なので，求める体積 V は



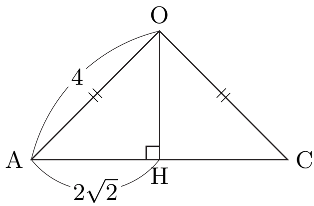
$$\boldsymbol{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times (\text{四面体 OABD の体積})$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} \times (\text{正四角錐 OABCD の体積})$$

ここで，O から平面 ABCD へ下ろした垂線の足を H とおくと

$$\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\mathrm{AC} = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2} = 2\sqrt{2}$$

であるから



$$\mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AH}^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

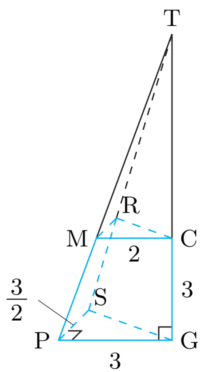
$$\therefore \quad V = \frac{1}{16} \times \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{2} = \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \ \mathbf{(cm^3)}}$$

151 (1) $\triangle\mathrm{CMR} \backsim \triangle\mathrm{CBA}$ であり

$$\mathrm{MR} : \mathrm{BA} = \mathrm{CM} : \mathrm{CB} = \frac{1}{3}\mathrm{CB} : \mathrm{CB} = 1 : 3$$

$$\therefore \quad \mathrm{MR} = \frac{1}{3}\mathrm{AB} = \underline{\mathbf{1\ cm}}$$

(2) 図のように 3 直線 GC，SR，PM の交点を T とおくと，三角錐 TMCR と三角錐 TPGS は相似となり，相似比は MC : PG = 2 : 3 なので，体積比は $\mathbf{2^3 : 3^3}$ = 8 : 27 である。



よって，求める体積 V は

$$\boldsymbol{V} = \left(1 - \frac{8}{27}\right) \times (\text{三角錐 TPGS の体積})$$

である。

$$\triangle\mathrm{PGS} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{PG} \cdot \mathrm{PS} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

TG = h とおくと，TC : TG = 2 : 3 より

$$(h-3) : h = 2 : 3$$

$$2h = 3(h-3) \qquad \therefore \quad h = 9$$

であるから

$$(\text{三角錐 TPGS の体積}) = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{PGS} \times h = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} \times 9 = \frac{27}{4}$$

したがって

$$V = \frac{19}{27} \times \frac{27}{4} = \underline{\boldsymbol{\frac{19}{4}}\ \mathbf{(cm^3)}}$$