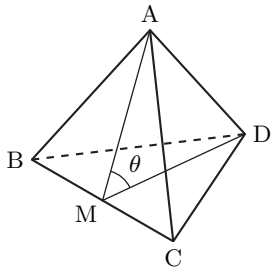
問題

正四面体

152 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，$\angle \mathrm{AMD} = \theta$ とする。このとき，$\cos\theta =$ $\boxed{}$ であり，三角形 AMD の面積は $\boxed{}$ である。（北海道工業大）



153 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 OA 上に点 P がある。$\angle \mathrm{BPC} = \theta$ とする。$\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ で $\mathrm{OP} < \dfrac{1}{2}$ のとき，BP の長さは $\boxed{}$ であり，OP の長さは $\boxed{}$ である。（独協医科大）

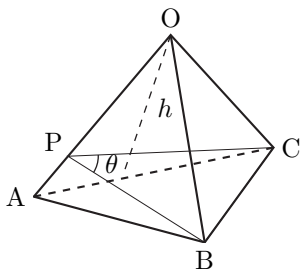
154 一辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，辺 OA を 3 : 1 に内分する点を P とする。$\angle \mathrm{BPC} = \theta$ とし，三角形 BPC の面積を S とおく。

(1) 線分 BP の長さは $\boxed{}$ である。

(2) $\cos\theta =$ $\boxed{}$，$S =$ $\boxed{}$ である。

(3) 正四面体 OABC の体積を V とおくと，$V =$ $\boxed{}$ である。

(4) 点 O から三角形 BPC に下ろした垂線の長さ h は $\boxed{}$ である。



（東邦大）

チェック・チェック

正四面体

152 正四面体は 4 つの合同な正三角形を面とする四面体です。また，M は辺 BC の中点より，AM，DM はそれぞれ正三角形 ABC，DBC の中線であり，三角形 AMD は AM = DM の二等辺三角形です。三角形 AMD の 3 辺の長さがわかれば余弦定理より $\cos\theta$ の値が求められますし，$\cos\theta$ の値から $\sin\theta$ の値，そして面積を求めることができます。

153 △BPC は BP = CP の二等辺三角形です。$\cos\theta$ の値が与えられているので余弦定理の利用を考えます。

154 (3) O から底面 ABC に下ろした垂線の足 H は

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$$

より三角形 ABC の外心です。さらに，三角形 ABC は正三角形であり，正三角形においては外心と重心は一致するので

H は重心

でもあります。これより

$$\mathrm{AH} = \frac{2}{3} \times (\text{中線の長さ})$$

です。

あるいは，AH は三角形 ABC の外接円の半径でもあるので，正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin 60^\circ} = 2 \times \mathrm{AH} \text{ より} \qquad \mathrm{AH} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{AB}$$

としてもよいですね。

(4) 四面体 OPBC の体積を，h を使うものと使わないものとで 2 通りに表してみましょう。

解答・解説

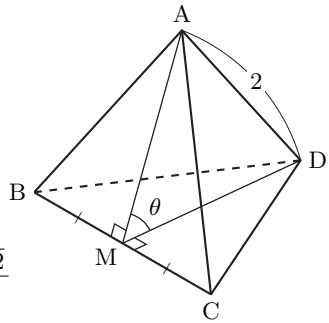
正四面体

152 AM，DM は正三角形の中線より

$$\mathrm{AM} = \mathrm{DM} = 2\sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

三角形 AMD に余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}}$$



$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって

$$\triangle\mathrm{AMD} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{2}}}$$

153 $\mathrm{BP} = x$ とおく。$\mathrm{BP} = \mathrm{CP}$ なので，$\triangle\mathrm{BPC}$ に余弦定理を用いて

$$\cos\theta = \frac{x^2+x^2-1}{2\cdot x\cdot x} = \frac{2x^2-1}{2x^2}$$

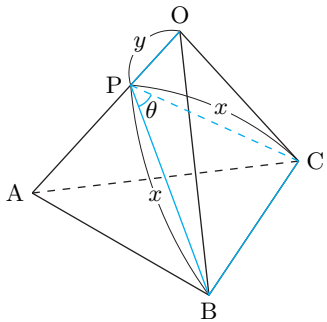
これと $\cos\theta = \dfrac{5}{13}$ より

$$\frac{2x^2-1}{2x^2} = \frac{5}{13}$$

$$26x^2 - 13 = 10x^2$$

$$x^2 = \frac{13}{16}$$

$$\therefore\quad \mathrm{BP} = x = \underline{\frac{\boldsymbol{\sqrt{13}}}{\mathbf{4}}}\quad (\because\quad x > 0)$$



$\angle\mathrm{BOP} = 60^\circ$ なので，$\mathrm{OP} = y$ とし，$\triangle\mathrm{OBP}$ において余弦定理を用いると

$$\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 = 1^2 + y^2 - 2\cdot 1\cdot y\cos 60^\circ$$

$$y^2 - y + \frac{3}{16} = 0$$

$$(4y-3)(4y-1) = 0$$

$$\therefore\quad \mathrm{OP} = y = \underline{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}}\quad \left(\because\quad y < \frac{1}{2}\right)$$

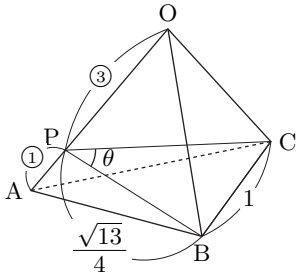
154 (1) 三角形 ABP に余弦定理を用いると

$$\mathrm{BP}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{13}{16}$$

$$\therefore \quad \underline{\mathbf{BP} = \frac{\sqrt{13}}{4}} \quad (\because \quad \mathrm{BP} > 0)$$

(2) $\mathrm{PC} = \mathrm{BP} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$ であるから，三角形 PBC に余弦定理を用いると

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BP}^2 + \mathrm{PC}^2 - \mathrm{BC}^2}{2 \cdot \mathrm{BP} \cdot \mathrm{PC}} = \underline{\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{13}}}$$



$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin\theta > 0$ であるから

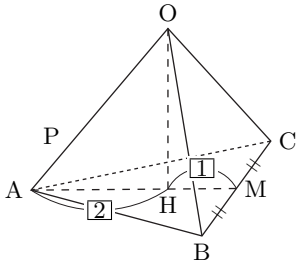
$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

よって，三角形 BPC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{12}{13} = \underline{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}}$$

(3) 点 O から三角形 ABC に垂線 OH をひくと，H は三角形 ABC の外心であり，三角形 ABC は正三角形より H は重心と一致する。よって，辺 BC の中点を M とすると，H は中線 AM 上にあって

$$\mathrm{AH} = \frac{2}{3}\mathrm{AM} = \frac{2}{3} \times 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



このとき

$$\mathrm{OH} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

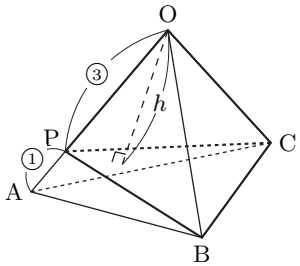
であるから，正四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{ABC} \times \mathrm{OH}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \underline{\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{12}}}$$

(4) 四面体 OPBC の体積を V' とする。OP : PA = 3 : 1 より

$$V' = V \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{12} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$



また

$$V' = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{h}{8}$$

でもあるから

$$\frac{h}{8} = \frac{\sqrt{2}}{16} \qquad \therefore \quad h = \underline{\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}}$$