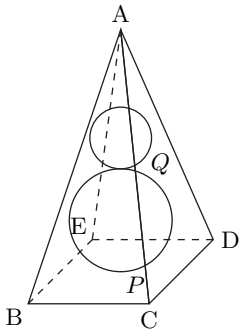
問題

球

155 一辺の長さが a である正四面体 ABCD に外接する球の半径は $\boxed{}$ である。（兵庫医科大）

156 図のように，1 辺の長さ 2 の正方形を底面とする正四角錐 ABCDE があり，その中にちょうどはいる 2 つの球 P，Q がある。球 P は正四角錐 ABCDE の底面および各側面に接し，球 Q は正四角錐 ABCDE の各側面に接している。さらに 2 つの球 P，Q は互いに接している。正方形 BCDE の面積と △ABC の面積が等しいとき，

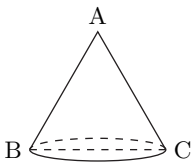


(1) 辺 AB の長さは $\boxed{}$ である。

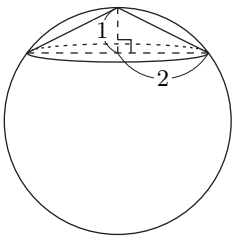
(2) 球 P の半径は $\boxed{}$ である。

(3) 球 Q の体積は $\boxed{}$ である。

157 右の図は，線分 BC を直径とする円を底面とし，点 A を頂点とする直円錐である。AB $=6$，BC $=6$ のとき，この直円錐の中に入る球のうち，体積が最大のものを O とする。球 O の体積を求めよ。



158 右図のように，高さが 1，底面の半径が 2 の円すいの頂点と底面の周が，球に内接している。この球の体積を求めよ。



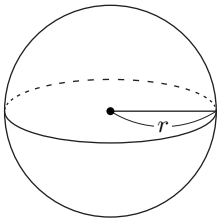
チェック・チェック

球

半径 r の球について

体積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$，表面積 $S = 4\pi r^2$

です。あとは球の半径を求めるために立体の**切り口を工夫**します。



155 正四面体 ABCD を対称な 2 つの図形（立体）に分割すると，外接球の中心はこの切り口の上にあります。さらに，この切り口を対称な 2 つの図形（三角形）に分割すると，外接球の中心はこの切り口の上にあります。

156 2 球と側面との接点がどのように表れるか考えましょう。接点と 2 球の中心を含む平面による切り口を考えます。

157 頂点 A と直径 BC を含む平面による切り口を考えましょう。内接球の中心は切り口の三角形の内心となります。また，切り口は正三角形となるので，内心は重心に一致します。

158 円錐の軸を含む平面で切れば，どこで切っても切り口は同じ形となります。

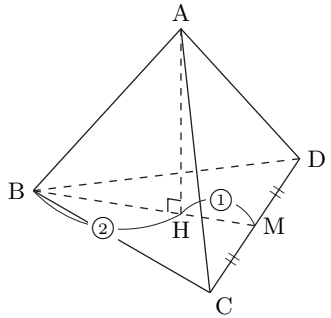
解答・解説

球

155 点 A から三角形 BCD に垂線 AH をひくと，AB = AC = AD より H は三角形 BCD の外心であり，三角形 BCD は正三角形より H は三角形 BCD の重心と一致する。辺 CD の中点を M とすると，H は中線 BM 上にあるから

$$\mathrm{BH} = \frac{2}{3} \times a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\therefore \quad \mathrm{AH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$



外接球の中心を O，半径を R とすると

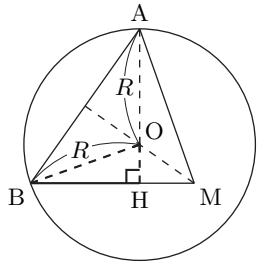
$$\mathrm{OH} = \frac{\sqrt{6}}{3}a - R$$

よって，三平方の定理より

$$\mathrm{BH}^2 + \mathrm{HO}^2 = \mathrm{OB}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a - R\right)^2 = R^2$$

$$\therefore \quad R = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{4}a}}$$



別解 二等辺三角形 MAB において，MO は∠AMB の 2 等分線だから

$$\mathrm{AO} : \mathrm{OH} = \mathrm{AM} : \mathrm{MH} = 3 : 1$$

$$\therefore \quad R = \mathrm{OA} = \frac{3}{4}\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

156 (1) 辺 BC の中点を F とすると，△ABC の面積と正方形 BCDE の面積が等しいので

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{BC} \cdot \mathrm{AF} = \mathrm{BC}^2 \qquad \therefore \quad \mathrm{AF} = 2 \cdot \mathrm{BC} = 4$$

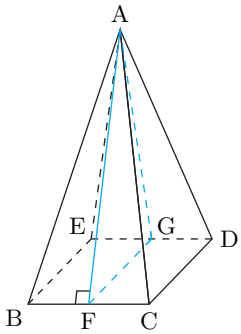
よって　　$\mathrm{AB} = \sqrt{\mathrm{AF}^2 + \mathrm{BF}^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{17}}}$

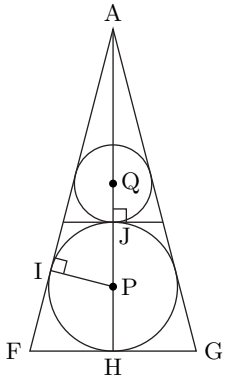
(2) ED の中点を G とし，**3 点 A，F，G を通る平面による切り口**を考える。対称性より，2 球の中心 P，Q はこの平面上にある。次頁の図のように各点をとると

$$\mathrm{FH} = \frac{1}{2}\mathrm{FG} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

であり，また

$$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{AF}^2 - \mathrm{FH}^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$





球 P の半径を r とおき，さらに，△AFH ∽ △API より

$$\mathrm{AF} : \mathrm{AP} = \mathrm{FH} : \mathrm{PI}$$
$$4 : (\sqrt{15} - r) = 1 : r$$
$$4r = \sqrt{15} - r \qquad \therefore \quad r = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{5}}}$$

(3) $\mathrm{AJ} = \mathrm{AH} - 2r = \sqrt{15} - 2 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{5} = \dfrac{3}{5}\sqrt{15}$ より

$$\mathrm{AJ} : \mathrm{AH} = \frac{3}{5}\sqrt{15} : \sqrt{15} = 3 : 5$$

なので，球 Q，P の半径の比は

$$\mathrm{QJ} : \mathrm{PH} = 3 : 5$$

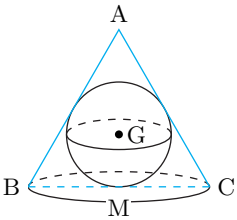
よって

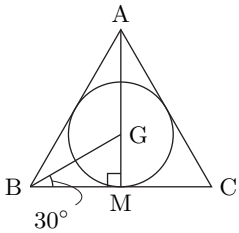
$$(\text{球 } Q \text{ の体積}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times (\text{球 } P \text{ の体積}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$
$$= \frac{3^2 \cdot 4\pi}{5^3} \times \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^3 = \frac{3^3 \cdot 4\sqrt{15}}{5^5}\pi = \underline{\boldsymbol{\frac{108\sqrt{15}}{3125}\pi}}$$

157 体積が最大となるのは，球が直円錐に内接するときである。

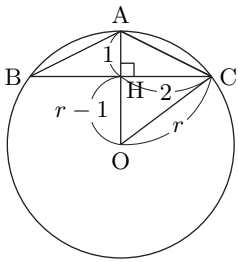
頂点 A と直径 BC を含む平面による切り口を考える。△ABC は 1 辺の長さが 6 の正三角形なので，内心と重心は一致し，球の中心 G は正三角形 ABC の重心である。BC の中点を M として，$\mathrm{GM} = \mathrm{BM}\tan 30^\circ = 3 \times \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ なので

$$(\text{球 } O \text{ の体積}) = \frac{4}{3} \times \pi(\sqrt{3})^3 = \underline{\boldsymbol{4\sqrt{3}\pi}}$$





158 図のように，**円錐の頂点 A と球の中心 O を通る平面による切り口**を考える。球の半径を r とすると，$\mathrm{OH} = r - 1$，$\mathrm{OC} = r$ より，△OCH に三平方の定理を用いると

$$r^2 = (r-1)^2 + 2^2 \qquad \therefore \quad r = \frac{5}{2}$$

よって，体積は $\dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \underline{\boldsymbol{\dfrac{125}{6}\pi}}$ である。