問題

角の 2 等分線

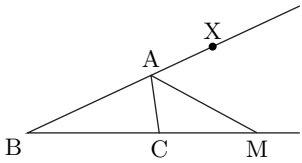
159 点 O を中心とする円 O の直交する二つの直径 PQ と RS に対して，OR の延長上に点 A を PA = PQ となるようにとる。PA と円 O の交点を M とし，さらに線分 MQ と線分 OA の交点を B とする。このとき，次の各問に答えよ。

(1) 点 M は線分 PA の中点であることを証明せよ。

(2) 線分の長さの比 AP : PB と AR : RB を求めよ。

(3) 線分 PR は ∠APB の二等分線であることを証明せよ。　（鹿児島大）

160 AB > AC である △ABC について，点 M を辺 BC の延長上に AB : AC = BM : MC をみたすようにとる。また，右の図において，点 X は辺 BA の延長上の点とする。

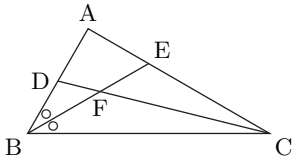


(1) 点 N を辺 AB 上に AC = AN をみたすようにとるとき，MA // CN であることを示せ。

(2) AM が ∠A の外角を二等分することを示せ。　（宮崎大　改）

161 (1) △ABC において，∠A の二等分線，∠A の外角の二等分線と直線 BC の交点をそれぞれ D，E とする。AB = 8，BD = 4，DC = 3 のとき，AC = □，DE = □ である。　（北星学園大）

(2) 右図において，AB : BC = 2 : 3，AD = DB，∠ABE = ∠CBE とし，三角形 BDF の面積を 5 とする。このとき，三角形 BCF の面積は □，三角形 CEF の面積は □ である。



（北海道工業大）

チェック・チェック

角の 2 等分線

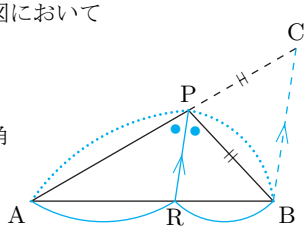
159 (1) まずは △APQ が正三角形であることを示しましょう。

(2)，(3) 内角の 2 等分線についての問題です。右図において

$$\angle \mathrm{APR} = \angle \mathrm{BPR}$$
$$\Longleftrightarrow \mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AR} : \mathrm{RB}$$

が成り立ちます。

(2)，(3) により $\Longleftarrow$ が証明されます。二等辺三角形 PBC をつくれば $\Longrightarrow$ の成立もわかりますね。

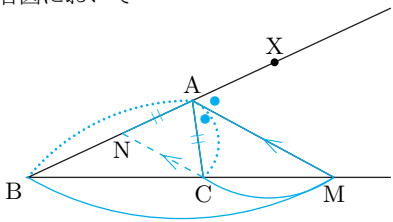


160 外角の 2 等分線についての問題です。右図において

$$\angle \mathrm{CAM} = \angle \mathrm{XAM}$$
$$\Longleftrightarrow \mathrm{BA} : \mathrm{AC} = \mathrm{BM} : \mathrm{MC}$$

が成り立ちます。

(1)，(2) により $\Longleftarrow$ が証明されます。二等辺三角形 ACN をつくれば $\Longrightarrow$ の成立もわかりますね。



161 (1) **159**，**160** で示した内角の 2 等分線，外角の 2 等分線の定理を用いる問題です。図をかきながら定理の適用を考えましょう。

(2) 三角形 BDF の面積がわかっているので

$$\triangle \mathrm{BCF} = \frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{DF}} \triangle \mathrm{BDF}$$

が使えます。また

$$\triangle \mathrm{CEF} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CD}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CA}} \triangle \mathrm{CAD}$$

です。どちらも辺の比は BF，BE が ∠B の 2 等分線であることから求めることができます。

解答・解説

角の 2 等分線

159 (1) OA は線分 PQ の垂直 2 等分線であるから

$$\mathrm{PA} = \mathrm{AQ}$$

である。条件

$$\mathrm{PA} = \mathrm{PQ}$$

と合わせると，△APQ は正三角形である。

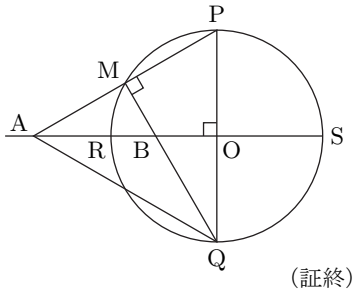
また，PQ は円 O の直径であるから

$$\angle\mathrm{PMQ} = 90^\circ$$

であり

$$\triangle\mathrm{AMQ} \equiv \triangle\mathrm{PMQ}$$

である。よって，M は線分 PA の中点である。　（証終）



(2) B は正三角形 APQ の中線 OA，MQ の交点，すなわち重心であるから

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = \mathrm{AP} : \frac{2}{3}\mathrm{AP}\sin 60^\circ = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = \underline{\boldsymbol{\sqrt{3} : 1}}$$

また，$\mathrm{OP} = r$ とおくと

$$\mathrm{OB} = \frac{1}{3}\mathrm{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{OP} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

なので

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = (\mathrm{OA} - \mathrm{OR}) : (\mathrm{OR} - \mathrm{OB}) = (\sqrt{3}r - r) : \left(r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \underline{\boldsymbol{\sqrt{3} : 1}}$$

(3) (2) より

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB}(= \sqrt{3} : 1)$$

である。AP の延長上に点 C を PB = PC となるようにとると，△PBC は二等辺三角形となり ∠PBC = ∠PCB である。

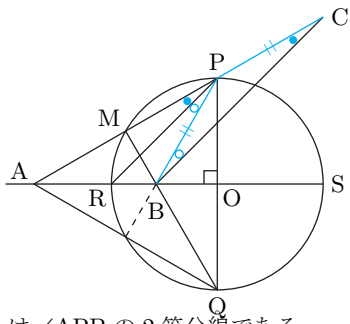
また，AR : RB = AP : PC より

$$\mathrm{RP} \parallel \mathrm{BC}$$

であるから

$$\begin{cases} \angle\mathrm{APR} = \angle\mathrm{PCB} & \text{（同位角）} \\ \angle\mathrm{BPR} = \angle\mathrm{PBC} & \text{（錯角）} \end{cases}$$

よって，∠APR = ∠BPR であり，線分 PR は ∠APB の 2 等分線である。　（証終）

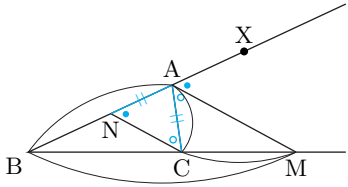


160 (1) BM : MC = BA : AC = BA : AN

であるから

MA // CN　……①

である。　（証終）



(2) ①より

$$\begin{cases} \angle MAX = \angle CNA & \text{（同位角）} \\ \angle MAC = \angle ACN & \text{（錯角）} \end{cases}$$

また，AC = AN より，△ANC は二等辺三角形だから

∠ANC = ∠ACN

したがって

∠MAX = ∠MAC

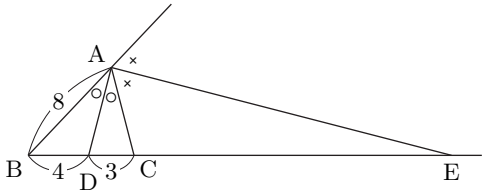
よって，AM は ∠A の外角を 2 等分している。　（証終）

161 (1) 線分 AD は ∠BAC の内角の 2 等分線だから

AB : AC = BD : DC

8 : AC = 4 : 3

∴　AC = **6**



線分 AE は ∠BAC の外角の 2 等分線だから

AB : AC = BE : EC

8 : 6 = (7 + CE) : CE

6(7 + CE) = 8CE　　∴　CE = 21

よって

DE = DC + CE = 3 + 21 = **24**

(2) BF は ∠B の内角の 2 等分線であり，D は辺 AB の中点だから

DF : FC = BD : BC = 1 : 3

よって

△BCF = 3 × △BDF = 3 × 5 = **15**

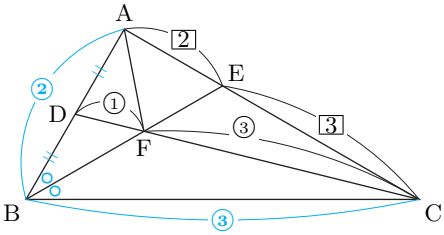
次に，D は辺 AB の中点だから

△CAD = △CBD = 5 + 15 = 20

BE は ∠B の内角の 2 等分線だから

AE : EC = BA : BC = 2 : 3

よって

$$\triangle CEF = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} \times \triangle CAD$$

$$= \frac{9}{20} \times 20 = \mathbf{9}$$