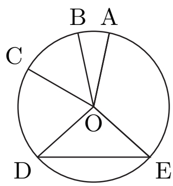
問題

円周角

169 円周上に点 A，B，C，D，E があり，円周をこれらの点で区切って得られる弧 $\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{DE}$，$\overset{\frown}{EA}$ の長さは弧 $\overset{\frown}{AB}$ の長さのそれぞれ 2 倍，3 倍，4 倍，5 倍となっている。



円の中心を O とするとき，$\angle AOB = \boxed{}$ であり，$\angle AED = \boxed{}$ である。（北海道工業大）

170 △ABC において，辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ，L，M，N とする。頂点 A から辺 BC またはその延長上に下ろした垂線を AH とする。次を証明せよ。

(1) $\angle LHN = \angle A$

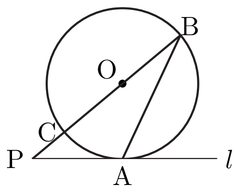
(2) 4 点 L，M，N，H は同一円周上にある（鳴門教育大）

171 △ABC において，$\angle A : \angle B : \angle C = 5 : 3 : 1$ であり，3 点 A，B，C を通る円 O の中心を O とする。線分 AO の延長と円 O との交点を D とする。円 O において弦 BC と平行に別の弦 EF を引く。ただし，EF は線分 OD と交わり，弧 BD 上に点 E がくるような位置にあるものとする。

(1) ∠BAD の大きさを求めよ。

(2) $\angle BAE = \angle CAF$ であることを証明せよ。（北星学園大）

172 図のように，直線 l は中心を O とする円と点 A において接している。また，l 上の点 P と O を通る直線と円との交点を図のように B，C とし，$\angle PAB = 115°$ であるとする。このとき



$\angle ABC = \boxed{}°$，$\angle APC = \boxed{}°$

である。（金沢工業大）

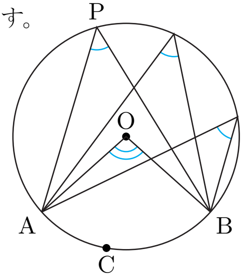
チェック・チェック

円周角

169 O を中心とする円周上の弧は両端の点 A，B を決めただけでは 1 つには定まりません。A，B と異なる第 3 の点 C を設定して，弧 ACB と表すことにより 1 つに定まります。ただし，弧 AB と表したときは，ふつうは小さい方の弧（これを劣弧といいます）を示します。

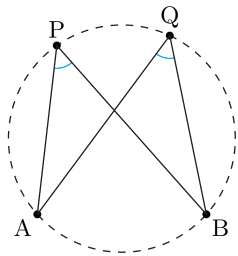
右図において，∠AOB を弧 AB に対する**中心角**といいます。

C を含まない弧 AB 上の A，B 以外の点 P に対して，∠APB を弧 AB に対する**円周角**といいます。円周角と中心角については，次の**円周角の定理**が重要です。



> 1 つの弧に対する**円周角の大きさは一定**であり，その弧に対する**中心角の大きさの半分**である。
>
> $$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

170 **円周角の定理の逆**も成り立ちます。すなわち



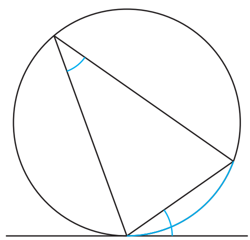
> 4 点 A，B，P，Q について，点 P，Q が直線 AB に関して同じ側にあるとき
>
> $$\angle APB = \angle AQB$$
>
> **ならば，4 点 A，B，P，Q は同一円周上**にある。

171 円周角の定理の応用問題です。

172 接線と弦のつくる角について次の定理があります。

> 円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。

これを**接弦定理**といいます。



解答・解説

円周角

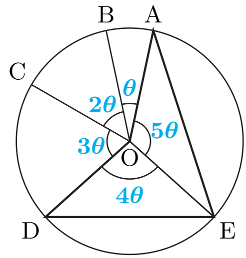
169 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} : \overset{\frown}{\mathrm{BC}} : \overset{\frown}{\mathrm{CD}} : \overset{\frown}{\mathrm{DE}} : \overset{\frown}{\mathrm{EA}} = 1:2:3:4:5$ より，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とすると

$\angle\mathrm{BOC} = 2\theta,\quad \angle\mathrm{COD} = 3\theta,\quad \angle\mathrm{DOE} = 4\theta,\quad \angle\mathrm{EOA} = 5\theta$

よって

$$\theta + 2\theta + 3\theta + 4\theta + 5\theta = 360^\circ$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{AOB} = \theta = \underline{\mathbf{24^\circ}}$$



また

$$\angle\mathrm{AED} = \frac{1}{2}\angle\mathrm{AOD} = \frac{1}{2}(\theta + 2\theta + 3\theta)$$

$$= \underline{\mathbf{72^\circ}}$$

170 (1) $\angle\mathrm{AHB} = 90^\circ$ より，H は辺 AB を直径とする円周上にあるから

$$\mathrm{LH} = \mathrm{LA}$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{LHA} = \angle\mathrm{LAH} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\angle\mathrm{AHC} = 90^\circ$ より，H は辺 AC を直径とする円周上にあるから

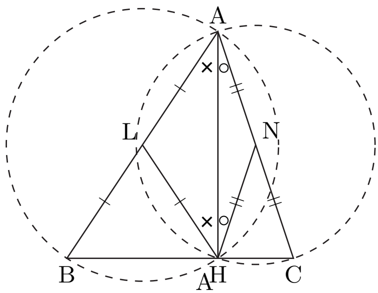
$$\mathrm{NH} = \mathrm{NA}$$

$$\therefore\quad \angle\mathrm{NHA} = \angle\mathrm{NAH} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より

$$\angle\mathrm{LHN} = \angle\mathrm{A}$$

（証終）



(2) 中点連結定理より

$$\mathrm{MN} \parallel \mathrm{AL} \quad かつ \quad \mathrm{MN} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \mathrm{AL}$$

したがって

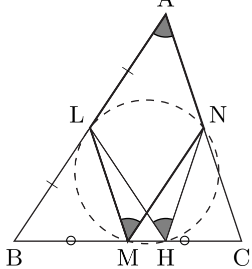
四角形 MNAL は平行四辺形

であることがわかり

$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{LMN}$$

これと (1) の結果から

$$\angle\mathrm{LMN} = \angle\mathrm{LHN}$$

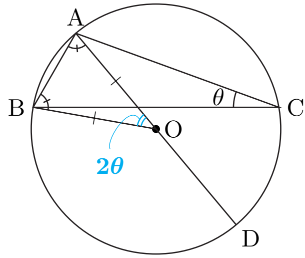


よって，円周角の定理の逆より，4 点 L，M，N，H は同一円周上にある。（証終）

171 (1) $\angle C = \theta$ とおくと，$\angle A = 5\theta$，$\angle B = 3\theta$ であり

$$5\theta + 3\theta + \theta = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = 20^\circ$$



$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対して円周角の定理より

$$\angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{ACB} = 2 \times 20^\circ = 40^\circ$$

三角形 OAB は OA = OB の二等辺三角形だから，求める ∠BAD の大きさは

$$\angle \mathrm{BAD} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \underline{\mathbf{70^\circ}}$$

(2) $\overset{\frown}{\mathrm{BE}}$ に対して円周角の定理より

$$\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{BCE} \quad \cdots\cdots ①$$

$\overset{\frown}{\mathrm{CF}}$ に対して円周角の定理より

$$\angle \mathrm{CAF} = \angle \mathrm{CEF} \quad \cdots\cdots ②$$

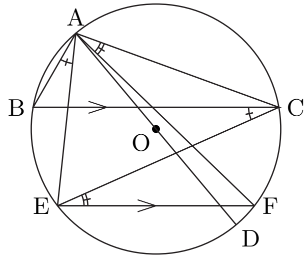
BC // EF より

$$\angle \mathrm{BCE} = \angle \mathrm{CEF} \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ より

$$\angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{CAF}$$

（証終）



172 線分 BC は円 O の直径だから

$$\angle \mathrm{CAB} = 90^\circ$$

これより

$$\angle \mathrm{PAC} = \angle \mathrm{PAB} - \angle \mathrm{CAB} = 115^\circ - 90^\circ = 25^\circ$$

接弦定理より

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{PAC} = \underline{\mathbf{25}}^\circ$$

したがって

$$\angle \mathrm{APC} = 180^\circ - \angle \mathrm{PAB} - \angle \mathrm{ABC} = 180^\circ - 115^\circ - 25^\circ = \underline{\mathbf{40}}^\circ$$