問題

三垂線の定理

179 相交わる 2 平面 P，Q がある。その交線 l 上の 1 点 A を通って，平面 Q 上に直線 AB を引く。いま，平面 P と平面 Q とのなす角を α，直線 AB と直線 l とのなす角を β，また，直線 AB と平面 P とのなす角を γ とおくと

$$\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta$$

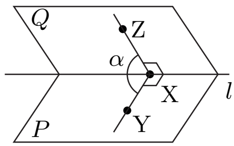
が成り立つことを証明せよ。ただし，α，β，γ はいずれも正の鋭角とする。

(神戸大)

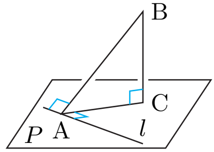
チェック・チェック

三垂線の定理

179 **2 平面 P，Q のなす角 α** とは，P，Q の交線 l 上に点 X をとり，P，Q 上に $\mathrm{XY}\perp l$，$\mathrm{XZ}\perp l$ となるように垂線 XY，XZ を引くときの **$\angle\mathrm{YXZ}$** のことです。



また，平面 P 上に直線 l があり，l 上に点 A，P 上にない点 B，l 上にない P 上の点 C について，次の**三垂線の定理**が成り立ちます。



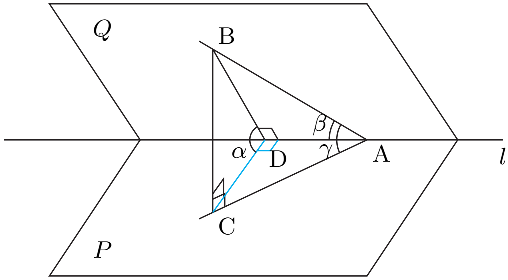
(i) $\mathrm{BC}\perp P$ かつ $\mathrm{AB}\perp l$ ならば $\mathrm{AC}\perp l$

(ii) $\mathrm{BC}\perp P$ かつ $\mathrm{AC}\perp l$ ならば $\mathrm{AB}\perp l$

(iii) $\mathrm{AB}\perp l$ かつ $\mathrm{AC}\perp l$ かつ $\mathrm{AC}\perp\mathrm{BC}$ ならば $\mathrm{BC}\perp P$

解答・解説

三垂線の定理



179 点 B から平面 P および直線 l にそれぞれ垂線 BC，BD を下ろす。すると，三垂線の定理より

$$\mathrm{CD} \perp l$$

となるから

$$\angle\mathrm{BDC} = \alpha$$

このとき，三角形 BDC において，$\angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$ より

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD}\sin\alpha \quad \cdots\cdots ①$$

また，三角形 ABD において，$\angle\mathrm{DAB} = \beta$，$\angle\mathrm{BDA} = 90^\circ$ より

$$\mathrm{BD} = \mathrm{AB}\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

さらに，三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC} = \gamma$，$\angle\mathrm{ACB} = 90^\circ$ より

$$\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\sin\gamma \quad \cdots\cdots ③$$

①，②，③ より

$$\sin\gamma = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{BD}\sin\alpha}{\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin\beta}} = \sin\alpha\sin\beta$$

（証終）