1　整数の性質

1.1　倍数・約数

問題

182 5040 を素因数分解すると

$$5040 = 2^{\square} \times 3^{\square} \times \square \times \square$$

5040 の正の約数は $\square$ 個ある。また，5040 の正の約数の和は $\square$ である。　　（杏林大）

183 正の約数の個数が 18 である最小の自然数 m を求めよ。　　（産業医科大）

184 30 の階乗の素因数分解を

$$30! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \cdots \times 23^i \times 29^j$$

と表したとき，$a = \square$，$b = \square$，$c = \square$ である。また，30! は末尾から続けて $\square$ 個の 0 が並ぶ。　　（玉川大）

チェック・チェック

182 整数 N が $N=a^pb^qc^r$ と素因数分解されるとき，N の約数は

$$a^xb^yc^z \ (0 \leqq x \leqq p,\ 0 \leqq y \leqq q,\ 0 \leqq z \leqq r)$$

の形をしており，N のすべての約数は

$$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)$$

を展開したときの各項として現れます。したがって，N の約数の個数は

$$(p+1)(q+1)(r+1) \text{ 個}$$

であり，N の約数の総和は

$$\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{r+1}-1}{c-1}$$

です。

183 $18=3^2\times 2$ と素因数分解できるので，18 は

$$18,\ 9\times 2,\ 6\times 3,\ 3\times 3\times 2$$

と分解できます。これより自然数 m の正の約数の個数が 18 となるのは

$$a^{17},\ a^8b^1,\ a^5b^2,\ a^2b^2c^1$$

の 4 通りに絞られます。

184 30! に含まれる素因数 3 の個数 b を具体的に求めてみましょう。素因数 3 を含む数は $\dfrac{30}{3}=10$ 個あり，素因数 3 の 1 つを○で表すと

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30		
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	$\cdots$	10 個
		○			○			○		$\cdots$	3 個
								○		$\cdots$	1 個

であり，$10+3+1=14$ 個です。

また，末尾に並ぶ 0 の個数は 30! に含まれる素因数 2 と 5 の個数で決まります。

解答・解説

182 5040 を素因数分解すると

$$5040 = 2^{\mathbf{4}} \times 3^{\mathbf{2}} \times \underline{\mathbf{5}} \times \underline{\mathbf{7}}$$

したがって，正の約数の個数は

$$(4+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2 \times 2 = \underline{\mathbf{60}}\text{（個）}$$

また，正の約数の和は

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(3^0 + 3^1 + 3^2)(5^0 + 5^1)(7^0 + 7^1)$$
$$= 31 \times 13 \times 6 \times 8 = \underline{\mathbf{19344}}$$

183 $18 = 9 \times 2 = 6 \times 3 = 3 \times 3 \times 2$ より，約数が 18 個ある自然数は次のように素因数分解される。

(i) a^{17} の形のとき，最小な自然数は $2^{17}(= 131072)$
(ii) a^8b^1 の形のとき，最小な自然数は $2^8 \times 3 = 768$
(iii) a^5b^2 の形のとき，最小な自然数は $2^5 \times 3^2 = 288$
(iv) $a^2b^2c^1$ の形のとき，最小な自然数は $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

以上より，求める最小の自然数 m は

$$\underline{\boldsymbol{m = 180}}$$

184 1 から 30 までの自然数のうち，2，2^2，2^3，$\cdots$ の倍数の個数を調べる。

$2 \times 15 = 30$ より，2 の倍数の個数は 15 個
$2^2 \times 7 = 28$ より，2^2 の倍数の個数は 7 個
$2^3 \times 3 = 24$ より，2^3 の倍数の個数は 3 個
$2^4 \times 1 = 16$ より，2^4 の倍数の個数は 1 個
$2^5 \times 1 = 32$ より，2^5 の倍数の個数は 0 個
$\cdots\cdots$

したがって

$$a = 15 + 7 + 3 + 1 = \underline{\mathbf{26}}$$

b，c についても同様に考えると

$$b = 10 + 3 + 1 = \underline{\mathbf{14}}$$
$$c = 6 + 1 = \underline{\mathbf{7}}$$

また，末尾に並ぶ 0 の個数は，30! の約数として含まれる 10 の個数によって定まる。すなわち，2 と 5 の個数によって定まる。ここでは，30! を素因数分解すると，2 が 26 個，5 が 7 個含まれるので，30! の約数として，10 は 7 個含まれることがわかる。したがって，30! の末尾の 0 の個数は $\underline{\mathbf{7}}$（個）