1　場合の数

1.1　集合の要素の個数

問題

208 300 から 440 までの整数のうち，3 の倍数全体の集合を A, 奇数全体の集合を B とする。このとき，

$n(A) = \boxed{}$，$n(B) = \boxed{}$，

$n(A \cap B) = \boxed{}$，$n(A \cup B) = \boxed{}$

である。ここで，$n(M)$ は集合 M の要素の個数を表す。　（東北工業大　改）

209 1 から 150 までの自然数の中で

(1) 3 でも 5 でも割り切れる自然数の個数を求めよ。

(2) 3 で割り切れるが，5 で割り切れない自然数の個数を求めよ。

(3) 3 でも 5 でも割り切れない自然数の個数を求めよ。　（北海道東海大）

210 3 種類の商品 A, B, C について市場調査を行ったところ，500 人から回答を得た。集計結果によれば，商品 A を買った人は 224 人，商品 B を買った人は 237 人，商品 C を買った人は 266 人であり，また 3 種類とも買った人は 20 人，3 種類の商品のどれも買わなかった人は 9 人であった。次の問いに答えよ。

(1) 2 種類以上の商品を買った人は $\boxed{}$ 人である。

(2) 商品 A, B, C のうち，3 種類すべては買わなかったが，どれか 2 種類を買った人は $\boxed{}$ 人である。

(3) 商品 A, B, C のいずれか 1 種類だけを買った人は $\boxed{}$ 人である。

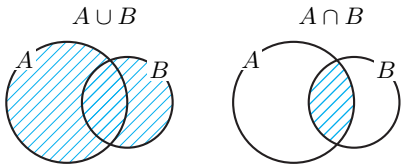
（慶應義塾大）

チェック・チェック

208 和集合 $A \cup B$，共通部分 $A \cap B$ の区別をつけましょう。また，集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表すと

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

が成り立ちます。



209 2 つの集合の取り扱いです。3 の倍数の集合を A，5 の倍数の集合を B とすると，問題文が意味するものは

(1) $A \cap B$　　(2) $A \cap \overline{B}$　　(3) $\overline{A} \cap \overline{B}$

となります。

かつ（$\cap$），または（$\cup$）と否定（$\overline{}$）を結ぶ法則として

$$\boldsymbol{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$$
$$\boldsymbol{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$$

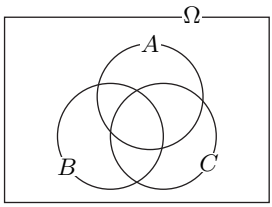
（ド・モルガンの法則）

がありましたね。

210 3 つの集合を扱った問題です。

$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)}$$

が成り立ちます。



(1) は

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 2n(A \cap B \cap C)$$

となります。(2)，(3) は (1) と関連づけて考えます。

別解 としては，Ω を 8 個の排反な集合に分けて考える方法もあります。

解答・解説

208 $A=\{300,\ 303,\ 306,\ 309,\ \cdots,\ 438\}$ であるから

$$n(A)=(438-297)\div 3=\underline{\mathbf{47}}$$

また，$B=\{301,\ 303,\ 305,\ 307,\ \cdots,\ 439\}$ であるから

$$n(B)=(439-299)\div 2=\underline{\mathbf{70}}$$

である。さらに，$A\cap B$ は 300 から 440 までの整数のうち，**3 の倍数である奇数の集合**なので

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{3k\mid k=101,\ 103,\ 105,\ 107,\ \cdots,\ 145\}\\&=\{3(2l-1)\mid l=51,\ 52,\ 53,\ \cdots,\ 73\}\end{aligned}$$

より

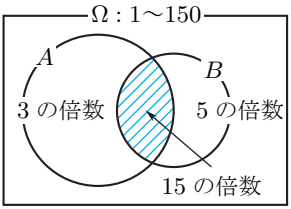
$$n(A\cap B)=73-50=\underline{\mathbf{23}}$$

したがって

$$\boldsymbol{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}=47+70-23=\underline{\mathbf{94}}$$

209 $\Omega=\{1$ から 150 までの自然数$\}$，
$A=\{3$ の倍数$\}$，$B=\{5$ の倍数$\}$ とおくと

$$n(A)=150\div 3=50,$$
$$n(B)=150\div 5=30$$

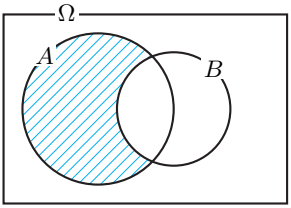


(1) 3 でも 5 でもわり切れる自然数は 15 の倍数なので，求める個数は

$$n(A\cap B)=150\div 15=\underline{\mathbf{10}\ (個)}$$

(2) 3 でわり切れるが 5 でわり切れない自然数の個数は

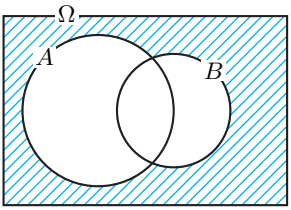
$$\begin{aligned}n(A\cap\overline{B})&=n(A)-n(A\cap B)\\&=50-10=\underline{\mathbf{40}\ (個)}\end{aligned}$$



$A\cap\overline{B}$

(3) 3 でも 5 でもわり切れない自然数の個数は

$$\begin{aligned}n(\overline{A}\cap\overline{B})&=n(\overline{A\cup B})=n(\Omega)-n(A\cup B)\\&=n(\Omega)-\{n(A)+n(B)\\&\qquad\qquad -n(A\cap B)\}\\&=150-(50+30-10)\\&=\underline{\mathbf{80}\ (個)}\end{aligned}$$



$\overline{A}\cap\overline{B}$

210 与えられた条件より

$$n(A)=224,\quad n(B)=237,\quad n(C)=266,$$
$$n(A\cap B\cap C)=20,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=9$$

であり

$$n(A\cup B\cup C)=500-9=491$$

である。また

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

より

$$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)+n(A\cap B\cap C)-n(A\cup B\cup C)$$
$$=224+237+266+20-491=256$$

(1) 2 種類以上の商品を買った人は

$$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-2n(A\cap B\cap C)$$
$$=256-2\times 20=\underline{\mathbf{216}\text{（人）}}$$

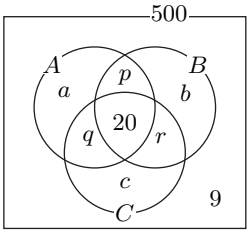
(2) (1) より

$$216-n(A\cap B\cap C)=216-20=\underline{\mathbf{196}\text{（人）}}$$

(3) (1) より

$$n(A\cup B\cup C)-216=491-216=\underline{\mathbf{275}\text{（人）}}$$

別解 右図のように各集合の要素の個数を a，b，c，p，q，r とおくと与えられた条件より



$$\begin{cases} a+b+c+p+q+r+20+9=500 \\ a+p+q+20=224 \\ b+p+r+20=237 \\ c+q+r+20=266 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases} a+b+c+p+q+r=471 & \cdots\cdots ① \\ a+p+q=204 & \cdots\cdots ② \\ b+p+r=217 & \cdots\cdots ③ \\ c+q+r=246 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

(1) ②＋③＋④－① より $p+q+r=(204+217+246)-471=196$

（求める人数）$=p+q+r+20=196+20=216$（人）

(2) （求める人数）$=p+q+r=196$（人）

(3) （求める人数）$=a+b+c=471-196=275$（人）　（$\because$ ①）