1.7　支払金額，支払方法

問題

225 (1) 10 円硬貨 3 枚と 100 円硬貨 1 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は［　　］通りある。

(2) 10 円硬貨 5 枚と 100 円硬貨 14 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は［　　］通りある。

(3) 10 円硬貨 14 枚と 100 円硬貨 5 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は［　　］通りある。

(4) 10 円硬貨 14 枚と 100 円硬貨 3 枚，および 500 円硬貨 3 枚の中から，1 枚以上を用いて表すことのできる金額は［　　］通りある。　（京都産業大）

226 千円札を 5 枚，二千円札を 5 枚，五千円札を 5 枚，一万円札を 2 枚，合計 6 万円をもっている人が，おつりの出ない買い物をした。

(1) 買い物の金額がちょうど 1 万円のとき，紙幣の組合せ方は全部で［　　］通りある。

(2) 買い物の金額がちょうど 2 万円のとき，支払った紙幣の枚数が 8 枚以下である組合せ方は全部で［　　］通りある。

(3) 買い物をした後で，手元に残った紙幣の枚数が 10 枚，その合計金額が 1 万 6 千円以上であったとき，支払った金額の最小値は［　　］万［　　］千円で，最大値は［　　］万［　　］千円である。

チェック・チェック

225 数枚の硬貨をもっているとき，何種類の支払いが可能か。

(1)，(2) 同じ種類の硬貨を何枚使うかを考えるのがよいでしょう。

(3)，(4) 10 円硬貨 10 枚と 100 円硬貨 1 枚はどちらも 100 円で金額としては一致します。この手のダブリに注意しましょう。

226 (1) 1 万円を支払うのに何通りの支払い方があるか。お札の枚数に着目して，千円札，二千円札，五千円札，一万円札をそれぞれ a 枚，b 枚，c 枚，d 枚とすると

$$\begin{cases} 1000a+2000b+5000c+10000d=10000 \\ 0 \leqq a \leqq 5,\quad 0 \leqq b \leqq 5,\quad 0 \leqq c \leqq 5,\quad 0 \leqq d \leqq 2 \end{cases}$$

をみたす整数解 $(a,\ b,\ c,\ d)$ の個数を求める問題になります。

(2) (1) の利用を考えます。

(3) 手元に残った枚数が 10 枚で残高合計が 1 万 6 千円以上であるから，支払い金額を考えると

$$\begin{cases} a+b+c+d=7 \\ 1000a+2000b+5000c+10000d<60000-16000 \\ 0 \leqq a \leqq 5,\quad 0 \leqq b \leqq 5,\quad 0 \leqq c \leqq 5,\quad 0 \leqq d \leqq 2 \end{cases}$$

が与えられた条件です。

解答・解説

225 (1) 10 円硬貨 3 枚と 100 円硬貨 1 枚の中から 1 枚以上を用いてできる金額は

10，20，30，100，110，120，130

の **7（通り）** である。

別解 10 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚，2 枚，3 枚の 4 通りであり，100 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚の 2 通りである。**1 枚も使わない場合を除く**から

$4 \times 2 - 1 = 7$（通り）

(2) 10 円硬貨 5 枚と 100 円硬貨 14 枚の中から 1 枚以上を用いることから

10 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚，$\cdots$，5 枚の 6 通り

100 円硬貨の使い方は 0 枚，1 枚，$\cdots$，14 枚の 15 通り

ともに，1 枚も使わない場合を除くと

$6 \times 15 - 1 =$ **89（通り）**

(3) 10 円硬貨 9 枚，100 円硬貨 5 枚の使い方はそれぞれ 10 通り，6 通りである。

1 枚も使わない場合を除くと

$10 \times 6 - 1 = 59$ 通り

これは，10 円，20 円，30 円，$\cdots$，590 円を表しているから，残りの 10 円硬貨 5 枚も合わせると

$59 + 5 =$ **64（通り）**

(4) 10 円硬貨 14 枚と 100 円硬貨 3 枚で表せる金額は，0 円も含めると

$10 \times 4 + 5 = 45$（通り）

さらに 500 円硬貨が 3 枚あるから，どの 1 枚も使わない場合を除くと

$45 \times 4 - 1 =$ **179（通り）**

226 千円札，二千円札，五千円札，一万円札をそれぞれ，a 枚，b 枚，c 枚，d 枚とすると

$0 \leqq a,\ b,\ c \leqq 5,\quad 0 \leqq d \leqq 2 \quad \cdots\cdots ①$

(1) $1000a + 2000b + 5000c + 10000d = 10000$ より

$a + 2b + 5c + 10d = 10 \quad \cdots\cdots ②$

①より

$10d = 10 - (a + 2b + 5c) \leqq 10 \qquad \therefore \quad d \leqq 1$

$d = 1$ のとき，②より

$a = b = c = 0$

$d = 0$ のとき，②より

$a + 2b + 5c = 10$

$5c = 10 - (a + 2b) \leqq 10 \qquad \therefore \quad c \leqq 2$

$c=2$ のとき，$a=b=0$
$c=1$ のとき，$a+2b=5$　　$\therefore\quad (b,\ a)=(0,\ 5),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1)$
$c=0$ のとき，$a+2b=10$　　$\therefore\quad (b,\ a)=(5,\ 0),\ (4,\ 2),\ (3,\ 4)$
以上より

$$\begin{aligned}(a,\ b,\ c,\ d)=&(0,\ 0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 2,\ 0),\\ &(5,\ 0,\ 1,\ 0),\ (3,\ 1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 2,\ 1,\ 0),\\ &(0,\ 5,\ 0,\ 0),\ (2,\ 4,\ 0,\ 0),\ (4,\ 3,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

なので，全部で **8（通り）** である。

(2) (1) より，ちょうど 1 万円となる組合せ方は，1 枚，2 枚，4 枚，5 枚，6 枚，7 枚の場合がある。たとえば，1 枚の場合 $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ と 2 枚の場合 $(0,\ 0,\ 2,\ 0)$ を組合せると，$(0,\ 0,\ 2,\ 1)$，つまり 3 枚で 2 万円の組合せができる。
したがって，8 枚以下となるのは，

(i) $(0,\ 0,\ 0,\ 1)$ とすべての組合せで 8 通り
(ii) $(0,\ 0,\ 2,\ 0)$ と 2 枚，4 枚，5 枚，6 枚のときの組合せで 6 通り
(iii) $(1,\ 2,\ 1,\ 0)$ と $(1,\ 2,\ 1,\ 0)$ の組合せで 1 通り（これは (ii) に含まれる）

の場合であり，$8+6=$ **14（通り）** である。

(3) **残った枚数が 10 枚**なので，支払いは 7 枚である。

$$a+b+c+d=7 \quad \cdots\cdots ③$$

残高の合計金額が 1 万 6 千円以上より

$$1000a+2000b+5000c+10000d<60000-16000$$
$$a+2b+5c+10d<44 \quad \cdots\cdots ④$$

支払い枚数は一定（7 枚）なので，**低額（高額）紙幣を多く使うほど支払い金額は小さく（大きく）なる。**

$a=5$ のときを考える。
③より，$b=2$ のとき $c=d=0$ であり，これらは④をみたす。
したがって，最小値は $1000\times5+2000\times2=9000$，つまり，**0 万 9 千円** となる。

次に，$d=2$ のときを考える。
③より，$a=5-(b+c)$ であり，④に代入して

$$b+4c<19$$
$$4c<19-b\leqq19 \qquad \therefore\quad c<\frac{19}{4}$$

よって $c=4$ のとき金額は最大となる。このとき，$a+b=1$，$0\leqq b<3$，$0\leqq a\leqq5$ なので，$a=0$，$b=1$ のときが最大。
したがって，最大値は

$$2000\times1+5000\times4+10000\times2=42000,\ \text{つまり，}\ \textbf{4 万 2 千円}$$

となる。