2.7　分配，組分け

問題

249 8 個の異なる品物を A，B，C の 3 人に分ける方法について，次の問いに答えよ。

(1) A に 3 個，B に 2 個，C に 3 個分ける方法は何通りあるか。

(2) 品物を 1 個ももらえない人がいてもよいとすれば，分け方は何通りあるか。

(3) A，B，C がいずれも，少なくとも 1 個の品物をもらう分け方は何通りあるか。　（滋賀大）

250 9 人の学生を 3 つの組に分けたい。

(1) 3 人ずつ，3 つの組 A，B，C に分ける分け方は何通りあるか。

(2) 3 人ずつ，3 つの組に分ける分け方は何通りあるか。

(3) 2 人，2 人，5 人の 3 つの組に分ける分け方は何通りあるか。

251 男女 6 人ずつ 12 人を 4 人ずつ 3 つのグループに分ける。

(1) このような分け方は何通りあるか。

(2) 各グループが男女 2 人ずつとなるような分け方は何通りあるか。

(3) (2) のように分けるとき，女 A さんと男 B さんが同じ組になる分け方は何通りあるか。　（学習院大）

チェック・チェック

品物と箱それぞれの区別がつくのかつかないのかで分けて整理してみましょう。まずは箱が A，B，C と区別される場合を考えます。

(I) 区別のつく n 個のものを，A，B，C の 3 つの箱に分ける分け方の数は，品物を①，②，$\cdots$，ⓝ として，各品物がどの箱に入るかを考えると，それぞれ 3 通りずつありますから（重複順列），3^n 通りです。（**249**(2)）

(II) 区別のつかない n 個のものを，A，B，C の 3 つの箱に分ける分け方の数は，A，B，C に入る品物の個数をそれぞれ a，b，c とすると

1 個も入らない箱があってもよいときは $\begin{cases} a+b+c=n \\ a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0 \end{cases}$

どの箱にも少なくとも 1 個入るときは $\begin{cases} a+b+c=n \\ a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1 \end{cases}$

をみたす **整数解 $(a,\ b,\ c)$ の個数** と一致します。重複組合せの問題になりますね。

次に箱に区別がない場合を考えます。

(III) 区別のつく n 個のものを a 個，b 個，c 個 $(a+b+c=n)$ の 3 つの組（グループ）に分ける分け方の数は

a，b，c すべてが異なるときは　${}_n\mathrm{C}_a \cdot {}_{n-a}\mathrm{C}_b$ 通り

でよいのですが，a，b，c のうち等しくなるものがあるときは注意が必要です。
たとえば

$a=b=c$ のときは　$\dfrac{{}_n\mathrm{C}_a \cdot {}_{n-a}\mathrm{C}_b}{3!}$ 通り　（**250**(2)）

となります。

(IV) 区別のつかない n 個のものを 3 つの組（グループ）に分ける分け方の数については
$a+b+c=n$ をみたす集合 $\{a,\ b,\ c\}$ の個数
を求めることになります。シラミつぶしに数え上げましょう。

上の 4 つのタイプにおさまる問題だけではありませんね。各問題にいろいろな条件がついてきます。解き方のパターンを覚えようとするのではなく，その問題に応じて頭を使って数え上げる練習をしましょう。

解答・解説

249 (1) 8 個の品物を A に 3 個，B に 2 個，C に 3 個分けるので，まず A が 8 個の中から 3 個をとり，次に B が残りの 5 個から 2 個をとり，最後に C が残りの 3 個をとればよく

$${}_8C_3 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times 1 = \underline{\mathbf{560}\text{（通り）}}$$

(2) 8 個の品物は誰のところにいってもよいので，8 個の品物はそれぞれについて持ち主は A，B，C のいずれかとなる。したがって

$$3^8 = \underline{\mathbf{6561}\text{（通り）}}$$

(3) (2) の中で，品物が **1 人に集まる場合**は 3 通りある。

2 人に集まる場合を考える。まず，3 人のうち 2 人の選び方は ${}_3C_2$ 通り。8 個の品物を 2 人に分ける分け方は 2^8 通りあり，そのうちいずれか 1 人に集まる場合が 2 通りある。

よって，2 人に集まる場合は

$${}_3C_2(2^8 - 2) = 3 \times 254 = 762\text{（通り）}$$

あるので，これらを除いて

$$6561 - 3 - 762 = \underline{\mathbf{5796}\text{（通り）}}$$

250 (1) 組に区別があるので，まず A 組に 9 人の中から 3 人を分けて，次に B 組に残りの 6 人の中から 3 人を分けて，残りの 3 人を C 組に分ければよいから

$${}_9C_3 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times 1 = 84 \times 20 = \underline{\mathbf{1680}\text{（通り）}}$$

(2) (1) で組に区別がない場合なので，A，B，C の順序である **3!でわる** と

$$1680 \div \mathbf{3!} = \underline{\mathbf{280}\text{（通り）}}$$

別解 9 人のうちの **特定の 1 人がどの 2 人と組むか** を決めて

$${}_8C_2\text{（通り）}$$

残り 6 人のうちの特定の 1 人がどの 2 人と組むかを決めて

$${}_5C_2\text{（通り）}$$

残った 3 人で最後の組が決まるから

$${}_8C_2 \times {}_5C_2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \times \frac{5 \cdot 4}{2} = 280\text{（通り）}$$

(3) 3 つの組を A，B，C とし，A に 2 人，B に 2 人，C に 5 人とすると，9 人の分け方は ${}_9C_2 \times {}_7C_2$ 通りあるが，A 組と B 組の区別はないので

$$\frac{{}_9C_2 \times {}_7C_2}{\mathbf{2!}} = \frac{36 \times 21}{2} = \underline{\mathbf{378}\text{（通り）}}$$

別解 9 人の中から 5 人の組をつくる方法は

$${}_9C_5\text{ 通り}$$

残り 4 人のうちの特定の 1 人が誰と組むかを決めて

$${}_3C_1\text{ 通り}$$

残った 2 人で最後の組が決まるから

$${}_9C_5 \times {}_3C_1 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times 3 = 378\text{（通り）}$$

251 (1) 4 人ずつ 3 つのグループに分ける方法は

$$\frac{{}_{12}C_4 \times {}_8C_4 \times {}_4C_4}{\mathbf{3!}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{11 \cdot 5 \cdot 9 \times 7 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$

$= \underline{\mathbf{5775}}$ **<u>（通り）</u>**

別解 12 人のうち特定の 1 人がどの 3 人と組むかを決めて

${}_{11}C_3$（通り）

残り 8 人のうちの特定の 1 人がどの 3 人と組むかで

${}_7C_3$（通り）

残った 4 人で最後のグループが決まるから

$${}_{11}C_3 \times {}_7C_3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5775\text{（通り）}$$

(2) 男子を 2 人ずつ 3 つのグループに分ける方法は

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{\mathbf{3!}} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 15\text{（通り）}$$

このそれぞれに，女子を 2 人ずつ組合せていくと

$15 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = \underline{\mathbf{1350}}$ **<u>（通り）</u>**

別解 男子 2 人ずつの 3 つのグループに分ける方法と女子 2 人ずつの 3 つのグループに分ける方法はともに

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2}{3!} = 15\text{（通り）}$$

であり，男子のグループと女子のグループの組合せ方は 3! 通りあるから

$15 \times 15 \times 3! = 1350$（通り）

(3) A さんと B さんが入る組の男女 1 人ずつを決めて，残りの 8 人を男女 2 人ずつの 2 つのグループに分ければよいから

$$({}_5C_1 \cdot {}_5C_1) \times \frac{{}_4C_2}{\mathbf{2!}} \times {}_4C_2 = \underline{\mathbf{450}}\text{ **<u>（通り）</u>**}$$