## 2.9　隣り合う順列，隣り合わない順列

### 問題

**256** A，B，C，D，E の 5 文字を一列に並べることにする。何も条件がないときは，並べ方は［　　］通りある。A と E が隣り合う並べ方は［　　］通りあり，A と E が隣り合わない並べ方は［　　］通りある。また，A と E が両端にある並べ方は［　　］通りある。（広島修道大）

**257** 7 個の文字 A，B，C，D，E，F，G を 1 列に並べるとき，A と B が隣り合う並べ方は［　　］通りである。A と B が隣り合わず，かつ，A と C が隣り合わない並べ方は［　　］通りである。（南山大）

**258** K，O，H，O，G，A，K，K，A の 9 文字を用いて作られる順列のうちで，3 個の K のうちの 2 個が 1 個ずつ両端にある場合について考える。O の 2 文字が隣り合い，A の 2 文字も隣り合う順列は，［　　］通りあり，O の 2 文字が隣り合うが，A の 2 文字は隣り合わない順列は，［　　］通りある。（文教大　改）

**259** 碁石の黒石 12 個と白石 3 個を 1 列に並べる。その際，白石は両端にはこず，白石の両隣は必ず黒石とする。また黒石の隣には少なくとも 1 個の黒石がくる。このような石の並べ方は［　　］通りある。（徳島文理大）

**260** 1，1，2，2，3，4，5 の 7 個の数字を全部使って横に並べるとき，1 の右隣りか左隣りの少なくとも一方には 2 があり，2 の右隣りか左隣りの少なくとも一方には 1 がある並べ方は何通りか。（宇都宮大）

## チェック・チェック

隣り合うものは**ひとかたまり**に，隣り合わないものは **2 段階操作**で考えてみるとよいでしょう。

あるいは，並べ方全体から**隣り合うものを除く**という考え方で隣り合わないものを数えることもできます。

**256** 隣り合う A と E をひとかたまりとみると AE，EA の 2 通りがあります。A と E が隣り合わない並べ方の総数は，並べ方全体から隣り合うものを除くとよいでしょう。

**257** 後半は，A と B が隣り合う事象を $B$，A と C が隣り合う事象を $C$ とすると，求める場合の数は

$$\begin{aligned} n(\overline{B} \cap \overline{C}) &= n(\overline{B \cup C}) = n(\Omega) - n(B \cup C) \\ &= n(\Omega) - \{n(B) + n(C) - n(B \cap C)\} \end{aligned}$$

**258** K 2 個が 1 個ずつ両端にあるので，実質 K，H，G，O，O，A，A の 7 文字の順列です。

**259** ●○●○●○● … ●は「白石の両隣りは必ず黒石」にはなっていますが，「黒石の隣には少なくとも 1 個の黒石がくる」という条件をみたしていません。
●●○●●○●●○●● … ●と並ぶと条件をみたします。さてどうしましょう？

**260** 1，1，2，2 の条件をみたす並べ方を考えてみましょう。あとは，隣り合うものをひとかたまりにみて考えます。

# 解答・解説

**256** 5 つの文字の並べ方は

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$（通り）

A と E が隣り合うのは AE と EA の 2 通りがあり，この **2 つの文字をセット**にしたものと，残りの B，C，D の 4 つの順列を考えると

$2 \times 4! = \mathbf{48}$（通り）

よって，A と E が隣り合わない並べ方は

$120 - 48 = \mathbf{72}$（通り）

また，A と E が両端にある並べ方は，A と E を並べてから残りの 3 文字を並べればよいので

$2 \times 3! = \mathbf{12}$（通り）

別解 A と E が隣り合わないように並べるには，B，C，D を並べて，すき間または両端の 4 か所に A と E を 1 つずつ入れていけばよい。

$3! \times 4 \cdot 3 = 72$（通り）

**257** A と B が隣り合うのは AB，BA の 2 通りあり，この **2 つの文字をセット**にして，残りの 5 文字と合わせた 6 つの並べ方を考えると

$2 \times 6! = \mathbf{1440}$（通り）

A と B，A と C が隣り合う並べ方はどちらも 1440 通り，A が B，C の両方と隣り合う並べ方は BAC，CAB のどちらかで，$2 \times 5! = 240$ 通りある。よって

$7! - (1440 + 1440 - 240) = 5040 - 2640 = \mathbf{2400}$（通り）

別解 後半は，A が右端にくる場合，その隣りにくるのは B，C を除く 4 つのいずれかで，A が左端にくる場合も同様だから

$2 \times 4 \times 5! = 960$（通り）

A が両端以外の場所にあるときは，A の両隣に D，E，F，G のいずれか 2 つがくる。この 3 文字のセットと残りの 4 文字の 5 つの順列を考えて

${}_4P_3 \times 5! = 1440$（通り）

したがって，求める並べ方は

$960 + 1440 = 2400$（通り）

**258** **O の 2 文字と A の 2 文字をセット**にして考えると，両端はともに K なので，

OO，AA，K，H，G という 5 つの文字の順列となり

$5! = \underline{\mathbf{120}}$（通り）

O の 2 文字をセットにして考えると，OO，A，A，K，H，G という 6 つの文字の順列となる。ここから A が隣り合う場合をひいて

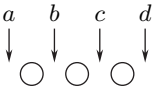
$\dfrac{6!}{2!} - 120 = 360 - 120 = \underline{\mathbf{240}}$（通り）

**259** 両端は黒石である。黒，白，黒の順に並べたものを A として，3 個の A と残り 4 個の黒石を並べればよく

A = ●○● として

$\dfrac{7!}{3!\,4!} = \underline{\mathbf{35}}$（通り）

別解 白石 3 個を右図のように並べ，その両端とすき間の $a$，$b$，$c$，$d$ に入れる黒石の数を考えると




$$\begin{cases} a+b+c+d=12 \\ a \geqq 2,\ b \geqq 2,\ c \geqq 2,\ d \geqq 2 \end{cases}$$

をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ の個数が求める総数であり，これは $A = a-2$，$B = b-2$，$C = c-2$，$D = d-2$ とおくと

$$\begin{cases} A+B+C+D=4 \\ A \geqq 0,\ B \geqq 0,\ C \geqq 0,\ D \geqq 0 \end{cases}$$

をみたす整数の組 $(A,\ B,\ C,\ D)$ の個数に一致する。したがって

${}_4\mathrm{H}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = 35$（通り）

**260** 題意より，1 と 2 が隣り合っていればよく，1，1，2，2 の並べ方を考えると

1212，1221，2112，2121

の 4 通りである。このおのおのに対して，前の 2 個，後の 2 個を $\boxed{\phantom{00}}$，$\boxed{\phantom{00}}$ として

$\boxed{\phantom{00}}$，$\boxed{\phantom{00}}$，3，4，5

の 5 個を並べ，$\boxed{\phantom{00}}$ に前の 2 個，後の 2 個の順に当てはめればよいから

$4 \times \dfrac{5!}{2!} = \underline{\mathbf{240}}$（通り）