2.4　いろいろな独立試行・反復試行

問題

291 問題が 4 問あり，各問題の解答群にはそれぞれ 3 つの選択肢がある。各問題の解答群の選択肢から，それぞれでたらめに選択肢を選んだ人が，2 問以上正解する確率はいくらか。（法政大）

292 3 個の赤玉と 2 個の白玉が入った袋から 1 個の玉を取り出し，玉の色を見てその玉を袋に戻す。この操作を繰り返し行うとき，次の問いに答えよ。

(1) 袋から n 回 ($n \geqq 1$) 玉を取り出したとき，n 回目に初めて赤玉が出る確率を求めよ。

(2) 袋から 5 回玉を取り出したとき，5 回目に 2 度目の赤玉が出る確率を求めよ。

(3) 袋から n 回玉を取り出したとき，n 回目に m 度目の赤玉が出る確率を求めよ。ただし，$n \geqq m \geqq 1$ とする。（大阪女子大）

293 A，B の 2 チームが試合をして，先に 3 勝したチームが優勝となる。A が勝つ確率は $\dfrac{3}{5}$，B が勝つ確率は $\dfrac{2}{5}$ である。

(1) A チームが，1 試合目から 3 試合目までで 2 試合に勝ち，4 試合目に勝って優勝する確率を求めよ。

(2) A が優勝する確率を求めよ。（日本福祉大）

294 ある学校では毎日，A，B，C，D，E の 5 曲の中から異なる 3 曲を無作為に選んで昼休みに放送している。n を任意の自然数とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) 1 日に曲 A，B が両方とも放送される確率を求めなさい。

(2) n 日間で曲 A，B のいずれもまったく放送されない確率を求めなさい。

(3) n 日間で曲 A が少なくとも 1 度は放送される確率を求めなさい。

(4) n 日間でどの曲も少なくとも 1 度は放送される確率を求めなさい。

（山口大）

チェック・チェック

291 理解してなくても正解となる確率が $\dfrac{1}{3}$ なんですからね。実力を測るのに選択肢を３つというのは出題者の手抜きですね。

正解数が２問，３問，４問の場合の確率を求めてもよいですが，余事象を考えて,「全問不正解か１問だけ正解」の場合の確率を求める方が場合分けが少なくてすみます。

292 赤玉，白玉の出方を具体的に書いてみれば様子がわかってくるでしょう。

(1) は $\underbrace{\text{白白}\cdots\text{白}}_{n-1\text{ 回}}\ \underbrace{\text{赤}}_{n\text{ 回目}}$ ということです。

(2) は (3) のヒントですね。まずは $n=5$ でやってみなさいという出題者の配慮です。

293 (1) A が２勝１敗した後，４試合目で勝つのは，A が勝つことを○，A が負けることを×で表すと

○○×○，　○×○○，　×○○○

の３通りがあり，２勝１敗する確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)$$

です。

(2) A の優勝が決まるのは

３試合目，４試合目，５試合目

のいずれかです。勝敗の順序に注意しましょう。

294 (1) ３曲放送されるので残りの１曲を決めましょう。

(2) C，D，E の３曲が毎日放送されるということです。

(3) 余事象の確率を考えましょう。

(4) これも余事象の確率を考えましょう。

解答・解説

291　**「2 問以上正解する」の余事象**となるのは,「全問不正解か 1 問だけ正解する」ときである。

(i) 全問不正解のとき

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

(ii) 1 問だけ正解のとき，何問目に正解したかを考えて

$${}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

よって求める確率は

$$1 - \left(\frac{16}{81} + \frac{32}{81}\right) = \underline{\boldsymbol{\frac{11}{27}}}$$

292　(1) 1 回目から $n-1$ 回目（$n \geqq 2$ のとき）まで白玉が出て，**$\boldsymbol{n}$ 回目に赤玉**が出る確率であるから

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \boldsymbol{\frac{3}{5}} = \underline{\boldsymbol{\frac{3 \cdot 2^{n-1}}{5^n}}}$$ （$n=1$ のときも成り立つ）

(2) 1 回目から 4 回目までに赤玉が 1 回，白玉が 3 回出て，**5 回目に赤玉**が出る確率であるから

$${}_4\mathrm{C}_1 \cdot \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \boldsymbol{\frac{3}{5}} = \frac{2^5 \cdot 3^2}{5^5} = \underline{\boldsymbol{\frac{288}{3125}}}$$

(3) 1 回目から $n-1$ 回目まで（$n \geqq 2$ のとき）に赤玉が $m-1$ 回，白玉が $n-m$ 回出て，**$\boldsymbol{n}$ 回目に赤玉**が出る確率であるから

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{m-1}\left(\frac{3}{5}\right)^{m-1}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-m} \times \boldsymbol{\frac{3}{5}} = \underline{\boldsymbol{\frac{(n-1)!}{(n-m)!(m-1)!} \cdot \frac{2^{n-m} \cdot 3^m}{5^n}}}$$

（$n=1$ のときも成り立つ）

293　(1) A が 1 試合目から 3 試合目までに 2 勝 1 敗し，4 試合目に勝つ確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right) \times \frac{3}{5} = \underline{\boldsymbol{\frac{162}{625}}}$$

(2) A が優勝するのは，次の 3 通りである。

(i) A が 3 試合目に勝って優勝（3 勝 0 敗で優勝）
(ii) A が 4 試合目に勝って優勝（3 勝 1 敗で優勝）
(iii) A が 5 試合目に勝って優勝（3 勝 2 敗で優勝）

(i) となるのは，1 試合目から 3 連勝する場合で，その確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$$

(ii) となる確率は，(1) より

$$\frac{162}{625}$$

(iii) となるのは，1 試合目から 4 試合目までに 2 勝 2 敗し，5 試合目に勝つ場合で，その確率は

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}=\frac{648}{3125}$$

したがって，A が優勝する確率は

$$\frac{27}{125}+\frac{162}{625}+\frac{648}{3125}=\underline{\boldsymbol{\frac{2133}{3125}}}$$

294 (1) 1 日に選ばれる 3 曲の組合せは ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 通りであり，これらは同様に確からしい。そのうち，A，B が両方とも選ばれる組合せは残り 1 曲の選び方で決まるから 3 通りである。求める確率は

$$\underline{\boldsymbol{\frac{3}{10}}}$$

(2) 1 日に A，B のいずれも放送されない確率は $\frac{1}{10}$ だから，求める確率は

$$\underline{\boldsymbol{\left(\frac{1}{10}\right)^n}}\quad\cdots\cdots①$$

(3) 1 日に A が放送されない確率は

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{10}=\frac{2}{5}$$

だから，n 日間で A が放送されない確率は

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n\quad\cdots\cdots②$$

よって，n 日間で A が少なくとも 1 度は放送される確率は

$$\underline{\boldsymbol{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$$

(4) $n=1$ のとき，5 曲が放送されることはないので $n\geqq 2$ で考える。

1 日に異なる 3 曲が放送されるから，n 日間で放送されるのは，次の 3 通りである。

(i) 3 曲の場合　　(ii) 4 曲の場合　　(iii) 5 曲の場合

(i) n 日間で 3 曲が放送される確率は，① より

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{10}\right)^n=10\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

(ii) n 日間で 4 曲が放送される確率は，② より

$${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)^n-{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{10}\right)^n=5\left(\frac{2}{5}\right)^n-4\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

以上より，どの曲も少なくとも 1 度は放送される確率，すなわち (iii) のときの確率は

$$1-10\left(\frac{1}{10}\right)^n-\left\{5\left(\frac{2}{5}\right)^n-4\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}$$

$$=\underline{\boldsymbol{1-6\left(\frac{1}{10}\right)^n-5\left(\frac{2}{5}\right)^n\quad(n\geqq 2)}}$$