1　式の計算

1.1　式の計算・展開

問題

1 次の各問いに答えよ。

(1) x についての整式 A，B が

$$2A+B=4x^3+7x^2+4x-1,\quad A-B=-x^3-4x^2+5x+1$$

をみたすとき，2 つの整式 A，B を求めよ。（福井工業大）

(2) 式 $5xy^2\times(-2x^2y)^2$ を計算せよ。（愛知工科大）

(3) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)(1+2x+3x^2)$ を展開したとき，定数項と x の係数を求めよ。

（千葉商科大）

(4) 次の式を展開せよ。

(i) $(x+1)^2(x-1)^2$（久留米工業大）

(ii) $(x^2-2xy+4y^2)(x^2+2xy+4y^2)$（函館大）

(iii) $(x-2y+3z)^2$（獨協大）

チェック・チェック

1 整式を展開するということは，**同類項をまとめ，降べき（または昇べき）の順に整理**して並べることです。

(1) 整式の加法・減法についての確認です。

(2) 単項式の整理です。次の性質を使います（指数法則）。

$$x^mx^n=x^{m+n},\quad (x^m)^n=x^{mn}$$

（m，n は数学 I では正の整数ですが，数学IIでは，実数の範囲まで広がります。）

(3) ていねいに展開してもよいのですが，求めるのは定数項と x の係数だけです。これらだけを拾い集めてもよいでしょう。

(4) (i) 2 次式の展開公式

$$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2 \quad \text{（複号同順）}$$

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

のどちらを先に使うと計算がラクになるでしょうか。

(ii) $x^2+4y^2=A$ と**置き換えて**展開すると計算がラクになります。

(iii) 3 文字の展開公式

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$$

を用います。

解答・解説

1 (1) x についての整式

$$2A+B=4x^3+7x^2+4x-1 \quad \cdots\cdots①$$
$$A-B=-x^3-4x^2+5x+1 \quad \cdots\cdots②$$

について，① + ② として，B を消去すると

$$3A=3x^3+3x^2+9x \qquad \therefore\ \underline{\boldsymbol{A=x^3+x^2+3x}}$$

また，① − 2 × ② として，A を消去すると

$$3B=6x^3+15x^2-6x-3 \qquad \therefore\ \underline{\boldsymbol{B=2x^3+5x^2-2x-1}}$$

(2) 指数法則を用いて計算すると

$$5xy^2\times(-2x^2y)^2=5xy^2\times(-2)^2x^{2\cdot2}y^2=20x^{1+4}y^{2+2}=\underline{\boldsymbol{20x^5y^4}}$$

(3) 与式を展開し，降べきの順に並べると

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)(1+2x+3x^2)=x+2x^2+3x^3+\frac{2}{x}+4+6x$$
$$=3x^3+2x^2+7x+4+\frac{2}{x}$$

よって，**定数項は 4**，**x の係数は 7**

別解　定数項と x が現れる項のみを拾うと

定数項は　$\dfrac{2}{x}\cdot 2x=4$

x の項は　$x\cdot 1+\dfrac{2}{x}\cdot 3x^2=7x$

定数項が現れる

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)(1+2x+3x^2)$$

x の項が現れる

(4) (i) 2 乗でくくると

$$(x+1)^2(x-1)^2=\{(x+1)(x-1)\}^2$$
$$=(x^2-1)^2$$
$$=\underline{\boldsymbol{x^4-2x^2+1}}$$

(ii) 公式が使えるように展開の仕方を工夫すると

$$(\text{与式})=(x^2+4y^2-2xy)(x^2+4y^2+2xy)$$
$$=(x^2+4y^2)^2-(2xy)^2$$
$$=(x^4+8x^2y^2+16y^4)-4x^2y^2$$
$$=\underline{\boldsymbol{x^4+4x^2y^2+16y^4}}$$

(iii) $(x-2y+3z)^2=x^2+(-2y)^2+(3z)^2+2x(-2y)+2(-2y)\cdot3z+2\cdot3z\cdot x$

$$=\underline{\boldsymbol{x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx}}$$

1.2　因数分解

問題

2　次の式を因数分解せよ。

(1) x^2-x-12　（岩手大）

(2) $2x^2+7x+6$　（湘南工科大）

(3) $a^2b+ab^2+a+b-ab-1$　（北海道薬科大）

(4) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)-9$　（大阪産業大）

(5) $x^3+x^2y-2xy-x^2+y$　（京都産業大）

(6) $(ax-3y)^2-(ay-3x)^2$　（広島電機大）

(7) $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$　（横浜市立大）

(8) x^5+x^3+x　（広島文教女子大）

チェック・チェック

2　因数分解するには次のようなことを考えます。

(i) 共通因数でくくる。
(ii) （最低次の）1 つの文字について整理する。
(iii) 公式の利用を考える。
(iv) 因数定理を利用する（数学II）。

(1) 公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を使います。

(2) タスキがけの公式 $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$ を使います。

(3) **1 つの文字**について式を整理してみましょう。

(4) 同じ項が現れるように，積の組合せを工夫して展開しましょう。

(5) **最低次数の文字**について式を整理してみましょう。

(6) 平方差の公式 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$ を使います。

(7) **1 つの文字**について式を整理してみましょう。あとは，公式をフル活用します。

(8) 複 2 次式 x^4+ax^2+b の式で，$x^2=t$ とおいてもうまくいかないときは，x^4 の項と定数項に着目して $x^4+ax^2+b=(x^2+p)^2-q^2x^2$ の形に変形します。

解答・解説

2 (1) $x^2-x-12=x^2+(-4+3)x+(-4)\cdot 3=\underline{\boldsymbol{(x-4)(x+3)}}$

(2) $2x^2+7x+6=\underline{\boldsymbol{(2x+3)(x+2)}}$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & & 3 & \longrightarrow & 3 \\ 1 & \times & 2 & \longrightarrow & 4 \\ \hline 2 & & 6 & & 7 \end{array}$$

(3) a について整理して

$$\begin{aligned} &a^2b+ab^2+a+b-ab-1 \\ =\ &ba^2+(b^2-b+1)a+b-1=\underline{\boldsymbol{(ab+1)(a+b-1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} b & & 1 & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \times & b-1 & \longrightarrow & b^2-b \\ \hline b & & b-1 & & b^2-b+1 \end{array}$$

【注意】1 つの文字について整理という定石以外でも，次のように対称性といった“式の形”に気づくことも大切である。つまり，基本対称式 $a+b$，ab のまとまりとして $ab\cdot(a+b)+(a+b)-ab-1$ の変形に気づけば

$$\begin{aligned} ab\cdot(a+b)+(a+b)-ab-1&=(ab+1)(a+b)-(ab+1) \\ &=(ab+1)(a+b-1) \end{aligned}$$

となる。

(4) 与式の積の順序を変えて

$$\begin{aligned} &(x-1)(x-7)(x-3)(x-5)-9 \\ =\ &(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)-9 \\ =\ &(x^2-8x+7)\{(x^2-8x+7)+8\}-9 \\ =\ &\boldsymbol{(x^2-8x+7)}^2+8\boldsymbol{(x^2-8x+7)}-9 \\ =\ &\{(x^2-8x+7)+9\}\{(x^2-8x+7)-1\} \\ =\ &(x^2-8x+16)(x^2-8x+6) \\ =\ &\underline{\boldsymbol{(x-4)^2(x^2-8x+6)}} \end{aligned}$$

(5) **最低次数の文字 $\boldsymbol{y}$** で整理して

$$\begin{aligned} &x^3+x^2y-2xy-x^2+y \\ =\ &(x^2-2x+1)y+x^3-x^2 \\ =\ &(x-1)^2y+x^2(x-1) \\ =\ &(x-1)\{(x-1)y+x^2\} \\ =\ &\underline{\boldsymbol{(x-1)(x^2+xy-y)}} \end{aligned}$$

(6) $(ax-3y)^2-(ay-3x)^2$

$$
\begin{aligned}
&= \{(ax-3y)+(ay-3x)\}\{(ax-3y)-(ay-3x)\} \quad \cdots\cdots(*)\\
&= \{(x+y)a-3(x+y)\}\{(x-y)a+3(x-y)\}\\
&= \underline{\boldsymbol{(a+3)(a-3)(x+y)(x-y)}}
\end{aligned}
$$

【注意】$(*)$ 以降は 1 つの文字について式を整理していけばよい。
x について整理するなら

$$
\begin{aligned}
(*) &= \{(a-3)x+(a-3)y\}\{(a+3)x-(a+3)y\}\\
&= (a-3)(a+3)(x+y)(x-y)
\end{aligned}
$$

(7) a について整理して

$$
\begin{aligned}
&a^4-2(b^2+c^2)a^2+b^4-2b^2c^2+c^4\\
&= a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2\\
&= a^4-2(b^2+c^2)a^2+\{(b-c)(b+c)\}^2\\
&= \{a^2-(b-c)^2\}\{a^2-(b+c)^2\}\\
&= \{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\{a-(b+c)\}\{a+(b+c)\}\\
&= \underline{\boldsymbol{(a-b+c)(a+b-c)(a-b-c)(a+b+c)}}
\end{aligned}
$$

(8) 共通因数の x でくくると

$$
\begin{aligned}
&x^5+x^3+x\\
&= x(x^4+x^2+1)\\
&= x\{(x^2+1)^2-2x^2+x^2\}\\
&= x\{(x^2+1)^2-x^2\}\\
&= x\{(x^2+1)-x\}\{(x^2+1)+x\}\\
&= \underline{\boldsymbol{x(x^2-x+1)(x^2+x+1)}}
\end{aligned}
$$

1.3 式の値：2 文字の対称式

問題

3 $a+b=2$，$a^2+b^2=3$ のとき

$$ab=\boxed{\quad},\quad a^4+b^4=\boxed{\quad},\quad a^6+b^6=\boxed{\quad}$$

である。 （大同工業大）

4 $x-\dfrac{1}{x}=2$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ。 （愛知工科大）

5 $x+\dfrac{1}{x}=3$ をみたす x の値は $\boxed{\quad}$ であり，このとき

$$x^4-2x^3-x^2-2x+1$$

の値は $\boxed{\quad}$ である。 （日本工業大）

チェック・チェック

3 式の対称性に着目します。**対称式は基本対称式で表す**ことができます。具体的には

$$\boldsymbol{x^2+y^2}=(x+y)^2-2xy$$

となります。また，数学IIの範囲になりますが，3 次のものは

$$\boldsymbol{x^3+y^3}=(x+y)(x^2-xy+y^2)=\boldsymbol{(x+y)\{(x+y)^2-3xy\}}$$

あるいは，公式 $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ を変形して

$$\boldsymbol{x^3+y^3}=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2\boldsymbol{=(x+y)^3-3xy(x+y)}$$

となります。

【注意】 2 文字 x，y の整式において，文字を入れ換えてももとの式と同じ式になるものをこの「2 文字についての**対称式**」といい，$x+y$，xy を**基本対称式**といいます。

4 $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ を $x-\dfrac{1}{x}$ で表すことを考えます。

5 条件式の分母を払えば x の 2 次方程式が得られます。

また，4 次式

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$$

については，式の形（係数の対称性）を活かした変形を考えます。

解答・解説

3 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ に，$a+b=2$，$a^2+b^2=3$ を代入すると

$$2^2=3+2ab \qquad \therefore \quad ab=\underline{\mathbf{\frac{1}{2}}}$$

また

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=3^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\underline{\mathbf{\frac{17}{2}}}$$

よって，$(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^6+b^6+a^2b^4+a^4b^2$ より

$$\begin{aligned} a^6+b^6 &= (a^2+b^2)(a^4+b^4)-a^2b^2(a^2+b^2) \\ &= 3\times\frac{17}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 3 \\ &= \underline{\mathbf{\frac{99}{4}}} \end{aligned}$$

別解 $a^6+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3=(a^2+b^2)^3-3(ab)^2(a^2+b^2)$ （数学 II）

$$=3^3-3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 3=\frac{99}{4}$$

4 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}=2^2+2=\underline{\mathbf{6}}$

5 $x+\dfrac{1}{x}=3$ より　　$x^2-3x+1=0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}}$

また

$$\begin{aligned} & x^4-2x^3-x^2-2x+1 \\ &= x^2\left(x^2-2x-1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x^2\left\{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right\} \\ &= x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right\} \\ &= x^2(3^2-2\cdot 3-3)=\underline{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

別解 $x^4-2x^3-x^2-2x+1$ を x^2-3x+1 でわる（数学II）と

$$x^4-2x^3-x^2-2x+1=(x^2-3x+1)(x^2+x+1)$$

であり，$x^2-3x+1=0$ より $x^4-2x^3-x^2-2x+1$ の値は 0 となる。

1.4　式の値：3 文字の対称式

問題

6　$abc \fallingdotseq 0$，$a+b+c=0$ のとき，式

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

の値は $\boxed{}$ である。　（久留米工業大）

7　$a-b+c=1$，$a^2+b^2+c^2=29$ のとき

$$ac-ab-bc$$

の値は $\boxed{}$ である。　（立教大）

チェック・チェック

3 文字 a，b，c についての対称式の問題です。

$$a+b+c,\ ab+bc+ca,\ abc$$

を 3 文字 a，b，c の**基本対称式**といいます。

6　与式 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ をバラすかまとめるかであとの処理が変わってきます。

7　$ac-ab-bc=ac+a(-b)+(-b)c$ ですから，$a=x$，$-b=y$，$c=z$ とおけば，公式

$$\boldsymbol{(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}$$

の中に与えられた条件式が現れます。

解答・解説

6 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$$= \frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$

$$= \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}$$

$$= \frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c} \quad (\because \quad a+b+c=0)$$

$$= -1-1-1=\underline{\mathbf{-3}}$$

別解 $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$$= \frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab}$$

$$= \frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}{abc}$$

$$= \frac{(b+c)a^2+(b^2+c^2)a+bc(b+c)}{abc}$$

$$= \frac{(b+c)a^2+\{(b+c)^2-2bc\}a+bc(b+c)}{abc}$$

$$= \frac{(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}-2abc}{abc}$$

$$= \frac{(b+c)(a+b)(a+c)-2abc}{abc}$$

$$= \frac{(-a)(-c)(-b)-2abc}{abc} \quad (\because \quad a+b+c=0)$$

$$= \frac{-3abc}{abc}=-3$$

7 $a-b+c=1$ の両辺を 2 乗すると

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=1$$

$a^2+b^2+c^2=29$ を代入すると

$$29-2ab-2bc+2ca=1$$

$$2(ac-ab-bc)=-28$$

$$\therefore \quad ac-ab-bc=\underline{\mathbf{-14}}$$

2　実数

2.1　平方根

問題

8 (1) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$ を簡単にせよ。ただし，$1<a<3$ とする。 (奈良大)

(2) $0<a<3$ のとき，$3\sqrt{a^2}+2\sqrt{a^2+4a+4}-2\sqrt{a^2-6a+9}$ を簡単にすると $\boxed{}$ になる。 (北海道薬科大)

チェック・チェック

8 実数 a に対して，平方（2 乗）すると a となる数を **a の平方根**といいます。すなわち，$x^2=a$ となる数 x のことです。

$a>0$ のとき，x は正と負の 2 つがあり，**正の方を $\sqrt{a}$**，**負の方を $-\sqrt{a}$** と表します。

$a=0$ のとき，$\sqrt{0}=0$

$a<0$ のとき，実数の範囲では a の平方根は存在しません。数学 II の複素数で扱います。

$\sqrt{}$ は正の数または 0 です。したがって，$\sqrt{a^2}=a$ となるのは $a \geqq 0$ のときだけです。$a<0$ のときも考えると

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

解答・解説

8 (1) $1 < a < 3$ より

$$\begin{cases} \sqrt{(a-1)^2} = |a-1| = a-1 \quad (\because \quad a-1>0) \\ \sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = -(a-3) \quad (\because \quad a-3<0) \end{cases}$$

よって

$$(\text{与式}) = (a-1)+(a-3) = \underline{\boldsymbol{2a-4}}$$

(2) $0 < a < 3$ より

$$\begin{cases} \sqrt{a^2} = |a| = a \quad (\because \quad a>0) \\ \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = |a+2| = a+2 \quad (\because \quad a+2>0) \\ \sqrt{a^2-6a+9} = \sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = -(a-3) \quad (\because \quad a-3<0) \end{cases}$$

よって

$$(\text{与式}) = 3a+2(a+2)+2(a-3) = \underline{\boldsymbol{7a-2}}$$

2.2 有理化

問題

9 次の各式の分母を有理化し，簡単にせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$ （長崎総合科学大）

(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ （神戸薬科大）

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}+1}$ （大阪経済大）

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ （中部大）

チェック・チェック

9 分母を有理化するには

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$$

として，分母において $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ の公式を利用します。

(3) （分母）$= (\sqrt{6}+1)+\sqrt{2}$ とみて分母を有理化しましょう。

(4) 分母の有理化を 2 回実行します。

解答・解説

9 (1) 分母と分子に $\sqrt{3}-1$ をかけると

$$(与式) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \underline{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}}$$

(2) 各項の分母をそれぞれ有理化すると

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2-1} = \sqrt{6}+\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}-2}{3-2} = \sqrt{6}-2$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$$

したがって

$$\begin{aligned}(与式) &= (\sqrt{6}+\sqrt{3})-(\sqrt{6}-2)-(\sqrt{3}+1)\\ &= \underline{\mathbf{1}}\end{aligned}$$

(3) 分母と分子に $(\sqrt{6}+1)-\sqrt{2}$ をかけると

$$\begin{aligned}(与式) &= \frac{(\sqrt{6}+1)-\sqrt{2}}{\{(\sqrt{6}+1)+\sqrt{2}\}\{(\sqrt{6}+1)-\sqrt{2}\}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{6}+1)^2-(\sqrt{2})^2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{5+2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2}+1)(5-2\sqrt{6})}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}\\ &= (\sqrt{6}-\sqrt{2}+1)(5-2\sqrt{6})\\ &= 5\sqrt{6}-5\sqrt{2}+5-12+4\sqrt{3}-2\sqrt{6}\\ &= \underline{\boldsymbol{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}+4\sqrt{3}-7}}\end{aligned}$$

(4) 分母と分子に $(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}$ をかけると

$$\begin{aligned}(与式) &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}\\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\\ &= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}\\ &= \underline{\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}}\end{aligned}$$

2.3 2 重根号

問題

10 次の各式の 2 重根号をはずせ。

(1) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ （慶應義塾大）

(2) $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$ （八戸工業大）

(3) $\sqrt{10-\sqrt{84}}$ （九州産業大）

チェック・チェック

10 2 重根号は $\sqrt{(\quad)^2}$ と変形して，外の根号をはずします。

$$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{p}\pm\sqrt{q}\quad(p\geqq q>0)$$ （以下，複号同順）

となるためには，上式の両辺を 2 乗すると

$$a\pm2\sqrt{b}=p+q\pm2\sqrt{pq}$$

ですから

$$\begin{cases} p+q=a & \text{（加えて } a\text{）} \\ pq=b & \text{（かけて } b\text{）} \end{cases}$$

となる 2 数 p，q を見つければよいわけです。このような p，q の値が見つかれば

$$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{(p+q)\pm2\sqrt{pq}}=\sqrt{(\sqrt{p}\pm\sqrt{q})^2}$$
$$=|\sqrt{p}\pm\sqrt{q}|=\sqrt{p}\pm\sqrt{q}\quad\text{（ただし，}p\geqq q>0\text{）}$$

として 2 重根号をはずすことができます。

解答・解説

10 (1) 加えて 4，かけて 3 となる 2 数を探すと 3 と 1 だから

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3\times 1}}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\underline{\boldsymbol{\sqrt{3}-1}}$$

(2) $\sqrt{a-2\sqrt{b}}$ として，中の $\sqrt{}$ の係数を 2 となるように整えてから，加えて a，かけて b となる 2 数を探す。加えて 21，かけて 20 となる 2 数は 20 と 1 だから

$$\sqrt{21-4\sqrt{5}}=\sqrt{21-2\sqrt{20}}=\sqrt{(20+1)-2\sqrt{20\times 1}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{20}-1)^2}=\sqrt{20}-1=\underline{\boldsymbol{2\sqrt{5}-1}}$$

(3) $\sqrt{a-2\sqrt{b}}$ として，中の $\sqrt{}$ の係数を 2 となるように整えてから，加えて a，かけて b となる 2 数を探す。加えて 10，かけて 21 となる 2 数は 7 と 3 だから

$$\sqrt{10-\sqrt{84}}=\sqrt{10-2\sqrt{21}}=\sqrt{(7+3)-2\sqrt{7\times 3}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}=\underline{\boldsymbol{\sqrt{7}-\sqrt{3}}}$$

2.4　無理数の相等

問題

11 $(p+\sqrt{2})(q+3\sqrt{2})=8+7\sqrt{2}$ をみたす有理数 p，q $(p<q)$ は

$p=$ $\boxed{}$，$q=$ $\boxed{}$ である。 （摂南大）

12 有理数 m と n について

$$(4\sqrt{3}+1)m+(3\sqrt{3}-3)n=\frac{1}{2\sqrt{3}-3}$$

が成立するとき，$m=$ $\boxed{}$，$n=$ $\boxed{}$ である。 （北海道薬科大）

チェック・チェック

$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ が無理数であることは既知とします。また，a，b，a'，b' が有理数，$\sqrt{p}$ が無理数のとき

$$a+b\sqrt{p}=a'+b'\sqrt{p} \quad \text{ならば} \quad \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$

です。これの証明は背理法を使います（**33** 参照）。

解答・解説

11 $(p+\sqrt{2})(q+3\sqrt{2})=8+7\sqrt{2}$ より

$$(pq+6)+(3p+q)\sqrt{2}=8+7\sqrt{2}$$

p，q は有理数なので，$pq+6$，$3p+q$ も有理数である。$\sqrt{2}$ は無理数であるから

$$\begin{cases} pq+6=8 & \cdots\cdots ① \\ 3p+q=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

②より，$q=7-3p$ であり，これを ① へ代入して

$$p(7-3p)+6=8$$

$$3p^2-7p+2=0 \qquad (3p-1)(p-2)=0 \qquad \therefore\quad p=\frac{1}{3},\ 2$$

$p=\dfrac{1}{3}$ のとき　　$q=7-3\cdot\dfrac{1}{3}=6$

$p=2$ のとき　　$q=7-3\cdot 2=1$

$p<q$ より　　$\boldsymbol{p=\dfrac{1}{3},\ q=6}$

12 有理数の部分と無理数の部分に分けると

$$(\text{左辺})=(m-3n)+(4m+3n)\sqrt{3}$$

$$(\text{右辺})=\frac{2\sqrt{3}+3}{(2\sqrt{3}-3)(2\sqrt{3}+3)}=\frac{2\sqrt{3}+3}{12-9}=1+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

m，n は有理数なので，$m-3n$，$4m+3n$ も有理数である。$\sqrt{3}$ は無理数であるから

$$\begin{cases} m-3n=1 \\ 4m+3n=\dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \therefore\quad \boldsymbol{m=\frac{1}{3},\ n=-\frac{2}{9}}$$

2.5　整数部分・小数部分

問題

13 $\sqrt{7}$ の小数部分を a とすると，$a = \sqrt{7} - \boxed{}$ である。
また，$a^2 + 4a - 5 = \boxed{}$ となる。　（大阪産業大　改）

14 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，
$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$，$b^2 + 2b + 5 = \boxed{}$ である。　（西日本工業大）

15 $x = \dfrac{1}{4-\sqrt{11}}$ を小数で表すとき，整数部分は $\boxed{}$，小数点以下第 1 位の数字は $\boxed{}$ である。　（青山学院大）

16 n を自然数とする。$\sqrt{n^2+1}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，
$-a + \dfrac{1}{b} = \boxed{}$ である。また，$-a + \dfrac{1}{b} = 5\sqrt{2}$ となる n の値は $\boxed{}$ である。　（愛知工業大）

チェック・チェック

13 実数 x の整数部分が a，小数部分が b のとき

$$x = a + b \quad (0 \leqq b < 1)$$

なので，a の値がわかれば，$b = x - a$ です。

14 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の分母を有理化することにより，整数部分 a がわかります。

$1 < 3 < 4$ より $1 < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ として，$\sqrt{3}$ の整数部分は 1 とわかりますが，

$\sqrt{3} = \overset{\text{ヒトナミニオゴレヤ}}{1.7320508}\cdots$ は覚えておくとよいでしょう。

15 小数点以下第 1 位の数字まで要求されています。$3 < \sqrt{11} < 4$ では評価が甘いので，$\sqrt{11}$ と $\dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$ を比較してみます。

$$(\sqrt{11})^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 11 - \frac{49}{4} = -\frac{5}{4} < 0$$

より，$\sqrt{11} < \dfrac{7}{2}$ であり，$3 < \sqrt{11} < \dfrac{7}{2}$ です。

16 n は自然数なので，$\sqrt{n^2+1}$ の整数部分が a とは

$$a \leqq \sqrt{n^2+1} < a + 1$$

が成り立つことです。

$$(n+1)^2 - (n^2+1) = 2n > 0$$

より

$$n^2 + 1 < (n+1)^2$$

ですから，$n^2 < n^2 + 1 < (n+1)^2$ に着目しましょう。

解答・解説

13 $\sqrt{4}=2$，$\sqrt{9}=3$ であるから $\mathbf{2<\sqrt{7}<3}$ より，$\sqrt{7}$ の整数部分は 2 である。
したがって，$\sqrt{7}$ の小数部分 a は

$$a=\sqrt{7}-\underline{\mathbf{2}}$$

このとき

$$a^2+4a-5=(a-1)(a+5)=(\sqrt{7}-3)(\sqrt{7}+3)=7-9=\underline{\mathbf{-2}}$$

14 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の分母を有理化すると

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

$1<\sqrt{3}<2$ より，$\mathbf{3<2+\sqrt{3}<4}$ であるから，$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の

整数部分 a は　　$a=\underline{\mathbf{3}}$

小数部分 b は　　$b=\left(2+\sqrt{3}\right)-3=\underline{\mathbf{\sqrt{3}-1}}$

このとき

$$b^2+2b+5=(b+1)^2+4=(\sqrt{3})^2+4=\underline{\mathbf{7}}$$

15 $x=\dfrac{1}{4-\sqrt{11}}$ の分母を有理化すると

$$x=\frac{4+\sqrt{11}}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}=\frac{4+\sqrt{11}}{16-11}=\frac{4+\sqrt{11}}{5}$$

ここで，$3^2<11<\left(\dfrac{7}{2}\right)^2$ より $3<\sqrt{11}<\dfrac{7}{2}$ であるから

$$7<4+\sqrt{11}<\frac{15}{2} \qquad \therefore\ \frac{7}{5}<\frac{4+\sqrt{11}}{5}<\frac{3}{2}$$

$\dfrac{7}{5}=1.4$，$\dfrac{3}{2}=1.5$ だから，$x=\dfrac{1}{4-\sqrt{11}}$ を小数で表すと

整数部分は $\underline{\mathbf{1}}$，小数点以下第 1 位の数字は $\underline{\mathbf{4}}$

16 n は自然数なので

$$\boldsymbol{n} = \sqrt{n^2} \boldsymbol{<} \boldsymbol{\sqrt{n^2+1}} \boldsymbol{<} \sqrt{(n+1)^2} = \boldsymbol{n+1}$$

であるから

整数部分 a は　　$a = n$

小数部分 b は　　$b = \sqrt{n^2+1} - n$

このとき

$$-a + \frac{1}{b} = -n + \frac{1}{\sqrt{n^2+1} - n} = -n + \frac{\sqrt{n^2+1} + n}{n^2 + 1 - n^2}$$

$$= \underline{\boldsymbol{\sqrt{n^2+1}}}$$

また，$-a + \dfrac{1}{b} = 5\sqrt{2}$ となる n の値は

$$\sqrt{n^2+1} = 5\sqrt{2}$$

の両辺を 2 乗すると

$$n^2 + 1 = 50 \qquad \therefore \quad n^2 = 49$$

n は自然数より　　$\underline{\boldsymbol{n = 7}}$

2.6　式の値：$\sqrt{\ }$ をはずす

問題

17 $x=2-\sqrt{3}$ のとき，$x^2-4x=$ $\boxed{}$ であり

$$x^3-2x^2-7x-1=\boxed{}$$

である。（福岡工業大）

18 $x=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，分母を有理化すると $x=$ $\boxed{}$ となる。

また，$x^2-10x+2$ の値を計算すると $\boxed{}$ となる。（北海道工業大）

19 $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ とする。このとき

$$a^4=\boxed{}+\boxed{}a+\boxed{}a^2$$

が成り立つ。ただし，$\boxed{}$ の中に入る数は有理数である。（甲南大）

チェック・チェック

17 $x=2-\sqrt{3}$ を代入すれば式の値は求まりますが，計算が煩雑です。

$x-2=-\sqrt{3}$ を平方して整理すると

$$x^2-4x+1=0$$

x はこの方程式の解としてとらえることができます。

$$x^2=4x-1$$

と変形すれば，2 次式 x^2 を 1 次式 $4x-1$ に置き換えることができます。

18 分母を有理化した x の値を $x^2-10x+2$ に代入すれば，値は求まりますが，代入する x を 1 箇所にまとめて（平方完成して）おけば，計算量を減らすことができます。

19 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ を利用します。2 度平方するとすべての $\sqrt{\ }$ をはずすことができます。

解答・解説

17 $x=2-\sqrt{3}$ より　　$x-2=-\sqrt{3}$
両辺を 2 乗すると
$$(x-2)^2=(-\sqrt{3})^2 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{x^2-4x=-1}}$$
これはさらに $x^2=4x-1$ と変形できて
$$\begin{aligned} x^3-2x^2-7x-1 &= x(4x-1)-2(4x-1)-7x-1 \\ &= 4x^2-16x+1=4(4x-1)-16x+1 \\ &= \underline{\boldsymbol{-3}} \end{aligned}$$

18 分母を有理化すると
$$x=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2}=\underline{\boldsymbol{5+2\sqrt{6}}}$$
したがって
$$x^2-10x+2=(x-5)^2-23=(2\sqrt{6})^2-23=\underline{\boldsymbol{1}}$$

19 $\sqrt{6}$ を左辺に移項して，両辺を 2 乗すると
$$(a-\sqrt{6})^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \qquad \therefore \quad a^2-2\sqrt{6}a+6=5+2\sqrt{6}$$
よって
$$a^2+1=2\sqrt{6}(a+1)$$
さらに，この式の両辺を 2 乗すると
$$(a^2+1)^2=(2\sqrt{6})^2(a+1)^2$$
$$a^4+2a^2+1=24(a^2+2a+1)$$
$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{a^4=23+48a+22a^2}}$$

2.7　式の値 : 無理数による対称式と交代式

問題

20　$x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ のとき

$x+y=\boxed{}$，　$xy=\boxed{}$，　$x^2+y^2=\boxed{}$

である。　（九州産業大）

21　$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値は $\boxed{}$ である。

また，$x=\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{3}}{\sqrt{p}+\sqrt{3}}$ が $x^2+\dfrac{1}{x^2}=62$ をみたすとき，p の値は $\boxed{}$ である。　（福岡大）

22　$x=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$y=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ のとき

$x^2-y^2=\boxed{}$，　$x^5y^3-x^3y^5=\boxed{}$

である。　（大同工業大）

チェック・チェック

20　x，y についての対称式の値を求める問題です。p.14【**式の値 : 2 文字の対称式**】で解説したように

x，y についての対称式は，必ず基本対称式 $x+y$，xy で表すことができる

ことに着目します。

21　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ は x と $\dfrac{1}{x}$ についての対称式です。x と $\dfrac{1}{x}$ についての対称式は $x\cdot\dfrac{1}{x}=1$ より，$x+\dfrac{1}{x}$ で表すことができます。

22　求める式は x，y の交代式なので，$x-y$，$x+y$，xy で表すことができます。

【注意】整式の中の 2 文字を入れ換えると，その式の符号だけが変わる式をこの 2 文字についての交代式といいます。

解答・解説

20　$x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\underline{\mathbf{4}}$

また　$xy=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\underline{\mathbf{1}}$

したがって

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot 1=\underline{\mathbf{14}}$$

21　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\dfrac{1}{x}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$　……①

$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$ のとき

$$x+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2+(\sqrt{5}+1)^2}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$=\frac{(6-2\sqrt{5})+(6+2\sqrt{5})}{5-1}=3$$

であるから，① より

$$x^2+\frac{1}{x^2}=3^2-2=\underline{\mathbf{7}}$$

また，$x=\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{3}}{\sqrt{p}+\sqrt{3}}$ のとき

$$x+\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{p}-\sqrt{3}}{\sqrt{p}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{p}+\sqrt{3}}{\sqrt{p}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{p}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{p}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{p}+\sqrt{3})(\sqrt{p}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(p+3-2\sqrt{3p})+(p+3+2\sqrt{3p})}{p-3}=\frac{2(p+3)}{p-3}$$

であるから，① と $x^2+\dfrac{1}{x^2}=62$ より

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=62 \qquad \therefore\quad x+\frac{1}{x}=\pm 8$$

$x+\dfrac{1}{x}=8$ のとき

$$\frac{2(p+3)}{p-3}=8 \qquad \therefore\quad p=5$$

$x+\dfrac{1}{x}=-8$ のとき

$$\frac{2(p+3)}{p-3}=-8 \qquad \therefore\quad p=\frac{9}{5}$$

したがって，p の値は　$\underline{\boldsymbol{p=5,\ \dfrac{9}{5}}}$

22 $x = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ より

$$x + y = 2\sqrt{6},\ \ x - y = 2\sqrt{2},\ \ xy = 6 - 2 = 4$$

よって

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = \underline{\mathbf{8\sqrt{3}}}$$

$$x^5y^3 - x^3y^5 = x^3y^3(x^2 - y^2) = 4^3 \times 8\sqrt{3} = \underline{\mathbf{512\sqrt{3}}}$$

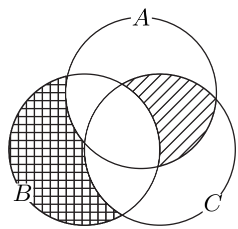
3　集合と論理

3.1　集合，補集合

問題

23 (1) 集合 $\{0,\ 1,\ 2\}$ の部分集合のうち，1, 2 の両方は含まないがどちらか一方は含むものをすべて書き出しなさい。（名古屋学院大）

(2) 集合 A, B, C が図のような関係をもっているとき，斜線の部分と格子の部分はそれぞれどのように表されるか。次の解答群の中から選べ。ここで，$\overline{A}$ は A の補集合を表す。



解答群

(a) $A \cap B \cap C$　(b) $A \cap B \cap \overline{C}$

(c) $A \cap \overline{B} \cap C$　(d) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

(e) $\overline{A} \cap B \cap C$　(f) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$

(g) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$　(h) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

（関西大）

(3) 全体集合 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ の部分集合 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9\}$，$B = \{2,\ 4,\ m\}$ (m は 2，4 以外の U の要素) に対して，$A \cap B = \{2,\ 4\}$ となるのは $m = \boxed{}$ のときであり，$\overline{A \cup B} = \{6,\ 7,\ 10\}$ となるのは $m = \boxed{}$ のときである。ただし，$\overline{A \cup B}$ は U における $A \cup B$ の補集合である。（愛知工業大）

24 1 から 100 までの整数について，6 でも 8 でも割り切れる数は全部で $\boxed{}$ 個。6 または 8 で割り切れる数は全部で $\boxed{}$ 個ある。

（西日本工業大）

25 $A = \{x \mid 0 < x < 6\}$，$B = \{x \mid x < -2,\ 2 < x\}$，$C = \overline{A} \cup \overline{B}$ とするとき，C および $A \cap C$ を求めよ。ただし，実数全体を全体集合とし，$\overline{A}$ は A の補集合を表す。（奈良大）

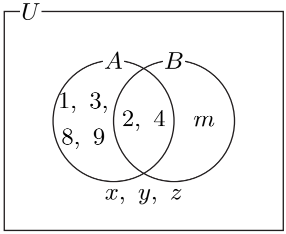
チェック・チェック

23　(1)　$\{a,\ b,\ c\}$ の部分集合は

　“a を含むか含まないか”，“b を含むか含まないか”，“c を含むか含まないか”の2通りずつがあるから，全部で $2^3 = 8$（個）あります。

(2)　3つの集合の共通部分，和集合にも慣れておきましょう。

(3)　A，B をベン図で表すと右図となります。



24　共通部分 $P \cap Q$ と和集合 $P \cup Q$ の使い分けです。

条件 p，q をみたす要素の全体を P，Q とすると

　「p かつ q」をみたす要素の全体が，共通部分 $P \cap Q$

　「p または q」をみたす要素の全体が，和集合 $P \cup Q$

ですね。集合 X の要素の個数を $n(X)$ とおくと

$$\boldsymbol{n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)}$$

です。

25　補集合 $\overline{P}$ を扱った問題です。

条件 p の否定「p でない」を $\overline{p}$ とかき，$\overline{p}$ をみたす要素の全体が $\overline{P}$ です。

- $\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$
- $\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$

（ド・モルガンの法則）

集合で表すと

- $\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$
- $\overline{P \cup Q} = \overline{P} \cap \overline{Q}$

解答・解説

23 (1) 集合 $\{0,\ 1,\ 2\}$ の部分集合は

$\emptyset,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,\ 1\},\ \{0,\ 2\},\ \{1,\ 2\},\ \{0,\ 1,\ 2\}$

の 8 つであり，そのうち 1，2 の両方は含まないが，どちらか一方を含むものは

$\underline{\boldsymbol{\{1\},\ \{2\},\ \{0,\ 1\},\ \{0,\ 2\}}}$

(2) 斜線の部分は

「A であり，かつ B でなく，かつ C である」

より

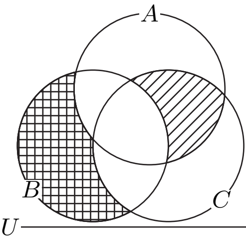
$A\cap\overline{B}\cap C$　$\underline{\textbf{(c)}}$

また，格子の部分は

「A でなく，かつ B であり，かつ C でない」

より

$\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$　$\underline{\textbf{(f)}}$

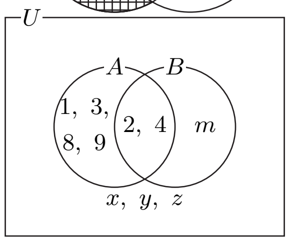


(3) $A\cap B=\{2,\ 4\}$ となるのは，m が

$m\in U$ かつ $m\notin A$

となるときだから

$\underline{\boldsymbol{m=5,\ 6,\ 7,\ 10}}$



$\overline{A\cup B}=\{6,\ 7,\ 10\}$ となるとき

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$

一方

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9\}\cup\{2,\ 4,\ m\}\\&=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9,\ m\}\end{aligned}$$

よって

$\underline{\boldsymbol{m=5}}$

別解 $\overline{A\cup B}=\{6,\ 7,\ 10\}$ となるとき

$A\cup(\overline{A\cup B})=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

だから，$5\in B$ でなければならない。よって

$m=5$

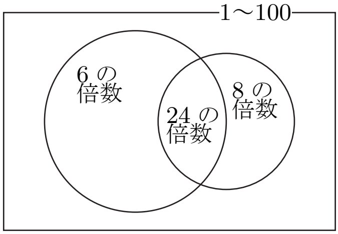
あるいは，$\overline{A\cup B}=\{6,\ 7,\ 10\}$ より $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$ なので

$m\in(A\cup B)\cap\overline{A}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}\cap\{5,\ 6,\ 7,\ 10\}=\{5\}$

よって

$m=5$

24 6 の倍数は $6 \times 16 = 96$ より 16 個，8 の倍数は $8 \times 12 = 96$ より 12 個，6 と 8 の最小公倍数である 24 の倍数は $24 \times 4 = 96$ より 4 個である。



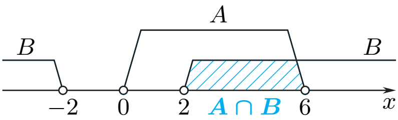
6 でも 8 でもわり切れる数は 24 の倍数であり，全部で

$\underline{\mathbf{4}\text{（個）}}$

6 または 8 でわり切れる数の個数は，6 の倍数と 8 の倍数の個数を合わせたものから 24 の倍数の個数を除けばよく，全部で

$16 + 12 - 4 = \underline{\mathbf{24}\text{（個）}}$

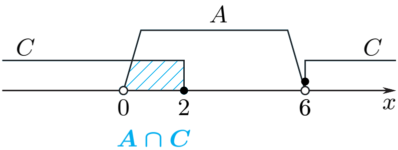
25 A，B の表す区間を数直線上にとると



であり，$A \cap B = \{x \mid 2 < x < 6\}$ である。これより

$$C = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \underline{\boldsymbol{\{x \mid x \leqq 2,\ \ 6 \leqq x\}}}$$

A と C を数直線上にとると

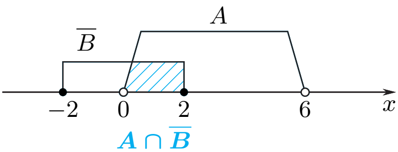


$$A \cap C = \underline{\boldsymbol{\{x \mid 0 < x \leqq 2\}}}$$

別解　$A \cap C = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B})$

$= A \cap \overline{B}\quad (\because\ \ A \cap \overline{A} = \emptyset)$

ここで，A と $\overline{B}$ を数直線上にとると



$$A \cap C = A \cap \overline{B} = \{x \mid 0 < x \leqq 2\}$$

3.2　必要・十分条件，同値

問題

26 (a)〜(d) の中から適切なものを選べ。

実数 x, y に対して，$x^2 = y^2$ は $x = y$ であるための $\boxed{}$

(a) 必要十分条件である。
(b) 十分条件だが必要条件ではない。
(c) 必要条件だが十分条件ではない。
(d) 必要条件でも十分条件でもない。　　(北見工業大　改)

27 正の整数 a，b について次の条件を考える。

(条件 1)　$a \geqq 3$ かつ $b \geqq 8$　　(条件 2)　$a + b \geqq 10$
(条件 3)　$a + b \geqq 11$　　(条件 4)　$ab \geqq 24$
(条件 5)　$a + b \geqq 10$ かつ $ab \geqq 24$
(条件 6)　$a + b \geqq 11$ かつ $ab \geqq 24$

(条件 1)〜(条件 6) のうちで条件 $\boxed{}$ は他のすべての条件の十分条件であり，条件 $\boxed{}$ は他のすべての条件の必要条件である。また，条件 $\boxed{}$ と条件 $\boxed{}$ は 互いに同値である。さらに，(条件 3) を満たして (条件 4) を満たさない $(a,\ b)$ は $\boxed{}$ 個ある。　　(早稲田大)

28 実数 x に関する 2 つの条件

$$p : 4x^2 - 12x + 5 \geqq 0, \quad q : x^2 - 3ax \leqq 0$$

を考える。p が q の必要条件にならないような定数 a の値の範囲は $\boxed{}$ である。　　(山梨大)

チェック・チェック

26 日常会話の「必要」,「十分」という言葉を数学の中にもち込むと混乱をまねく人もいます。矢印の向きだけに着目しましょう。すなわち

命題「$p \Longrightarrow q$」（p ならば q）が真であるとき

q は p であるための**必要条件**,

p は q であるための**十分条件**

であるといいます。

また，2 つの命題「$p \Longrightarrow q$」（p ならば q）,「$q \Longrightarrow p$」（q ならば p）がともに真であるとき

p は q であるための必要十分条件,

q は p であるための必要十分条件,

p と q は同値

であるといいます。

27 条件 p，q をみたす要素全体の集合（**真理集合**という）をそれぞれ P，Q と表すと

「$p \Rightarrow q$ が真である」 $\Longleftrightarrow$ 「$P \subset Q$」

28 p，q の真理集合を P，Q と表すと,「p が q の必要条件にならない」ということは「$P \supset Q$ が成り立たない」ということです。まずは，$P \supset Q$ が成り立つための a の値の範囲を求めましょう。

解答・解説

26 $x^2=y^2 \iff x^2-y^2=0 \iff (x+y)(x-y)=0 \iff x=\pm y$

であり

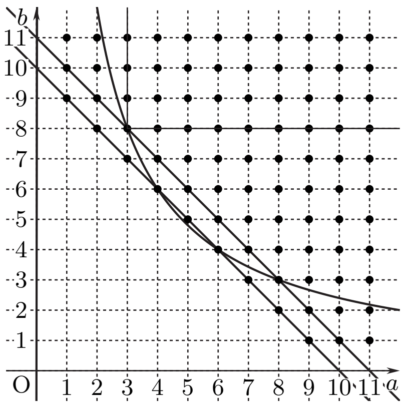
$$x^2=y^2 \;\overset{\times}{\underset{\bigcirc}{\rightleftarrows}}\; x=y$$

よって，$x^2=y^2$ は $x=y$ であるための必要条件だが十分条件ではない。　<u>**(c)**</u>

27 (条件 1)〜(条件 6) をみたす真理集合をそれぞれ P_1, P_2, $\cdots$, P_6 とする。「$a \geqq 3$ かつ $b \geqq 8$」ならば「$a+b \geqq 11$ かつ $ab \geqq 24$」が成り立つこと，および右図をみると $P_4=P_5$ であることに注意すると，これらの集合の包含関係は

$P_1 \subset P_3 \subset P_2$
$P_1 \subset P_4(=P_5) \subset P_2$
$P_1 \subset P_6(=P_3 \cap P_4) \subset P_2$

となる。この包含関係より



(条件 1) は他のすべての条件の十分条件である。　<u>**(条件 1)**</u>

(条件 2) は他のすべての条件の必要条件である。　<u>**(条件 2)**</u>

(条件 4) と (条件 5) は同値である。　<u>**(条件 4)，(条件 5)**</u>

さらに，$P_3 \cap \overline{P_4}$ に属する $(a,\ b)$ は右図の斜線部分にあり

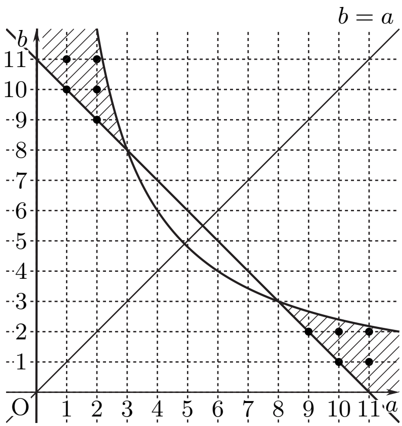
$a=1$ のとき
　$b=10,\ 11,\ \cdots,\ 23$ の 14 個
$a=2$ のとき
　$b=9,\ 10,\ 11$ の 3 個

領域は直線 $b=a$ に関して対称だから

$b=1$ のとき，14 個
$b=2$ のとき，3 個

あるから，全部で

$(14+3)\times 2=$ <u>**34（個）**</u>



28 条件 p，q をみたす x の真理集合をそれぞれ P，Q とおく。

p が q の必要条件になることは，$P \supset Q$ が成り立つことと同じであるから，p が q の必要条件にならない a の値の範囲は，$P \supset Q$ が成り立たない a の値の範囲である。

条件 p について

$$4x^2 - 12x + 5 = (2x-1)(2x-5)$$

より

$$P = \left\{ x \,\middle|\, x \leqq \frac{1}{2},\ \frac{5}{2} \leqq x \right\}$$

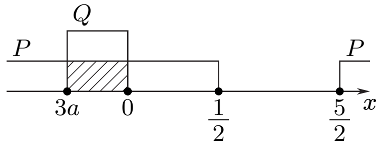
また，条件 q について

$$x^2 - 3ax = x(x-3a)$$

より

$$Q = \{ x \mid x(x-3a) \leqq 0 \}$$

$a < 0$ のとき　$Q = \{ x \mid 3a \leqq x \leqq 0 \}$



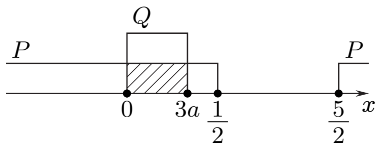
$P \supset Q$ が成り立つための a の条件は

$$3a \leqq \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad a \leqq \frac{1}{6}$$

よって，求める a の値の範囲は

$$\underline{\boldsymbol{a > \frac{1}{6}}}$$

$a \geqq 0$ のとき　$Q = \{ x \mid 0 \leqq x \leqq 3a \}$



3.3　否定・逆・裏・対偶

問題

29 次の空欄にあてはまる条件を記入せよ。

a，b を実数とするとき，条件「$ab > 0$ かつ $a + b \geqq 1$」の否定は $\boxed{}$ である。

（立教大）

30 命題「$a > 0$ かつ $b > 0$ ならば，$ab > 0$ である」の逆を述べ，その真偽について，真であれば証明し，偽であれば反例をあげよ。（山口大）

31 命題「$x = 1$ ならば $x^2 = 1$ である」の対偶を示せ。（法政大）

チェック・チェック

29 命題 p に対して「p でない」という命題を p の**否定**命題といい，$\overline{p}$ と表します。

「$\overline{p \text{ または } q}$」と「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」は同値

「$\overline{p \text{ かつ } q}$」と「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」は同値

です。

30 命題「$p \Longrightarrow q$」に対して,「$q \Longrightarrow p$」を**逆**といいます。

31 命題「$p \Longrightarrow q$」に対して,「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」を**対偶**といいます。

命題「$p \Longrightarrow q$」と否定 $\overline{p}$ を組み合わせて，逆，裏，対偶といった命題をつくることができます。この関係は覚えておきましょう。

$$\begin{tikzcd}
\boxed{p \Longrightarrow q} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{逆}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{裏}"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "\text{対偶}" description] & \boxed{q \Longrightarrow p} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{裏}"] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\boxed{\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{逆}"'] & \boxed{\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}}
\end{tikzcd}$$

また，**もとの命題の真偽と対偶の真偽は一致**することも重要です。

解答・解説

29　「A かつ B」の否定は「$\overline{A}$ または $\overline{B}$」であるから

条件「$ab>0$ かつ $a+b \geqq 1$」

の否定は

$\boldsymbol{ab \leqq 0}$ **または** $\boldsymbol{a+b<1}$

である。

30　「p ならば q」の逆は「q ならば p」であるから

命題「$a>0$ かつ $b>0$ ならば，$ab>0$ である」

の逆は

「$\boldsymbol{ab>0}$ ならば，$\boldsymbol{a>0}$ かつ $\boldsymbol{b>0}$ である」

この命題は **偽** である。

反例は $\boldsymbol{a=-1,\ b=-1}$ のように，$a<0$ かつ $b<0$ であるものをあげればよい。

31　「p ならば q」の対偶は「$\overline{q}$ ならば $\overline{p}$」であるから

命題「$x=1$ ならば $x^2=1$ である」

の対偶は

「$\boldsymbol{x^2 \neq 1}$ ならば $\boldsymbol{x \neq 1}$ である」

【参考】もとの命題「$x=1$ ならば $x^2=1$ である」は真なので，対偶である

「$x^2 \neq 1$ ならば $x \neq 1$ である」

も真である。

3.4　背理法

問題

32 $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ が無理数であることを示せ。　（大分大）

33 a，b，c，d を有理数，x を無理数とするとき

$$a + bx = c + dx \text{ ならば } a = c \text{ かつ } b = d$$

が成り立つことを証明せよ。　（福井県立大）

チェック・チェック

　ある命題を証明するとき

　　その**命題が成り立たないと仮定すると，矛盾が生じる。**

　　したがって，その命題は成り立たなければならない

とする証明法を**背理法**といいます。

　とくに，$p \Longrightarrow q$ の形の命題を背理法を用いて示すには，**結論 q を否定**して矛盾を導けばよいですね。

32 $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ を有理数と仮定して，矛盾を導いてもよいのですが，$\dfrac{5}{3}$ は有理数であり

（有理数）×（無理数）＝（無理数）

なので，$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せば十分ですね。

33 この事実は **11**，**12** でも用いています。キチンと証明できるようにしておきましょう。

解答・解説

32 $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}=\dfrac{5}{3}\times\sqrt{2}$ において，$\dfrac{5}{3}$ は有理数より，$\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法を用いて示す。$\sqrt{2}$ を有理数と仮定すると

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p}\quad（p,\ q \text{ は互いに素である正の整数}）$$

と表せる。平方して整理すると

$$2p^2=q^2\quad\cdots\cdots①$$

左辺は 2 の倍数より，右辺の q^2 も 2 の倍数であり，q も 2 の倍数である。

（なぜならば，q を 2 の倍数でないとすると，$q=2k-1$（k は正の整数）とおけて

$$q^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1$$

となり，q^2 が 2 の倍数であることに反する。）

よって，$q=2k$（k は正の整数）とおくことができる。このとき，① は

$$2p^2=(2k)^2\qquad\therefore\quad p^2=2k^2$$

右辺は 2 の倍数より，左辺の p^2 も 2 の倍数であり，p も 2 の倍数である。

以上より，p と q はともに 2 の倍数となるが，これは p と q が互いに素であることに反する。

よって，$\sqrt{2}$ は無理数であり，$\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ も無理数である。　（証終）

33 $a+bx=c+dx$ より

$$(b-d)x=-(a-c)\quad\cdots\cdots①$$

$b=d$ であることを背理法を用いて示す。$b\neq d$ と仮定すると

$$x=-\frac{a-c}{b-d}$$

$a,\ b,\ c,\ d$ は有理数だから右辺は有理数である。これは x が無理数であることに反する。よって，仮定は誤りで $b=d$ である。

このとき，① より

$$-(a-c)=0\qquad\therefore\quad a=c$$

以上より，$a+bx=c+dx$ ならば $a=c$ かつ $b=d$ である。　（証終）