1　2 次関数のグラフ

1.1　頂点の座標

問題

34 (1) 2 次関数 $y = x^2 + 2x + 4$ のグラフの軸の方程式は $\boxed{}$，頂点の座標は $\boxed{}$ である。（足利工業大）

(2) 放物線 $y = 2x^2 + ax + b$ の頂点の座標が $(1,\ 3)$ であるとき

$$a = \boxed{},\quad b = \boxed{}$$

である。（北海道工業大）

(3) 2 つの 2 次関数 $y = -x^2 + 6x + a$ と $y = 4x^2 + bx + 39$ のグラフが，同じ頂点をもつとき，$a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ である。（武蔵大）

チェック・チェック

34 2 次関数のグラフをかくには

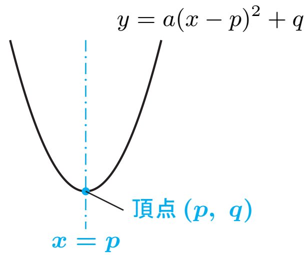
$$y = ax^2 + bx + c = a(x-p)^2 + q \quad (a \neq 0)$$

の形への変形（**平方完成**）がスムーズにできるようになっていなければなりません。このとき

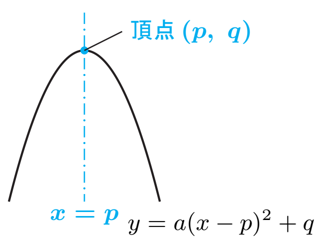
頂点の座標 $(p,\ q)$，軸の方程式 $x = p$

ですから，a の符号により，下のようなグラフになります。

$a > 0$ のとき



$a < 0$ のとき



解答・解説

34 (1) $y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$
なので，軸の方程式は $\underline{\boldsymbol{x=-1}}$，頂点の座標は $\underline{\boldsymbol{(-1,\ 3)}}$ である。

(2) 頂点の座標が $(1,\ 3)$ となる放物線の式で 2 次の係数が 2 であるものは

$$y=2(x-1)^2+3=2x^2-4x+5$$

これが $y=2x^2+ax+b$ と等しいから

$$\underline{\boldsymbol{a=-4,\quad b=5}}$$

(3) 2 つの 2 次関数は

$$y=-x^2+6x+a=-(x-3)^2+9+a$$

$$y=4x^2+bx+39=4\left(x+\frac{b}{8}\right)^2-\frac{b^2}{16}+39$$

より，グラフの頂点の座標はそれぞれ

$$(3,\ 9+a),\ \left(-\frac{b}{8},\ -\frac{b^2}{16}+39\right)$$

であり，これらが一致することから

$$\begin{cases} 3=-\dfrac{b}{8} \\ 9+a=-\dfrac{b^2}{16}+39 \end{cases} \qquad \therefore\ \underline{\boldsymbol{a=-6,\quad b=-24}}$$

1.2 グラフの移動

問題

35 2 次関数 $y = x^2 - 3x + 1$ のグラフを G とする。

(1) グラフ G を y 軸方向に平行移動して，原点を通るようにしたグラフを表す関数を求めよ。

(2) グラフ G を x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $\dfrac{1}{4}$ だけ平行移動したグラフを表す関数を求めよ。 （福井工業大）

36 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフを x 軸に関して対称移動し，さらにそれを x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したところ，$y = 2x^2$ のグラフが得られた。このとき $a =$ $\boxed{\text{アイ}}$，$b =$ $\boxed{\text{ウ}}$，$c =$ $\boxed{\text{エ}}$ である。 （センター試験）

37 放物線 $y = x^2 - 2x - 1$ と原点に関して対称な曲線を表す方程式を求めなさい。 （長岡技術科学大）

チェック・チェック

グラフの形を変えない移動（合同変換）として

平行移動，対称移動，回転移動

があります。（回転移動は数学IIIの複素数平面で学びます。）

35 関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に α，y 軸方向に β だけ**平行移動**するとグラフの式は

$$\boldsymbol{y - \beta = f(x - \alpha)}$$

です。

36 **対称移動**は，線対称と点対称があります。

x 軸，y 軸，直線 $y = x$，原点

に関する対称移動は正しく使えるようにしておきましょう。関数 $y = f(x)$ のグラフを **x 軸に関して対称移動**させたグラフを表す式は $\boldsymbol{y = -f(x)}$ です。

37 関数 $y = f(x)$ のグラフを**原点に関して対称移動**させたグラフを表す式は $\boldsymbol{-y = f(-x)}$ です。

解答・解説

35 (1) G を y 軸方向に b だけ平行移動したグラフの式は

$$y-b=x^2-3x+1$$

これが原点を通るとき

$$0-b=1 \qquad \therefore \quad b=-1$$

よって，求める関数は

$$\underline{\boldsymbol{y=x^2-3x}}$$

(2) G を x 軸方向に $-\dfrac{1}{2}$，y 軸方向に $\dfrac{1}{4}$ だけ平行移動したグラフの式は

$$y-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{2}\right)+1$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{y=x^2-2x}}$$

36 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸に関して対称移動すると

$$y=-ax^2-bx-c$$

さらに x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$$y-3=-a(x+1)^2-b(x+1)-c$$

$$\therefore \quad y=-ax^2-(2a+b)x-a-b-c+3$$

これが，$y=2x^2$ と一致するから

$$\begin{cases} -a=2 \\ -(2a+b)=0 \\ -a-b-c+3=0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{a=-2,\quad b=4,\quad c=1}}$$

別解 $y=ax^2+bx+c$ の頂点を $(p,\ q)$ とおく。

この頂点を x 軸に関して対称移動すると

$$(p,\ -q)$$

さらに x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると

$$(p-1,\ -q+3)$$

これが $y=2x^2$ のグラフの頂点 $(0,\ 0)$ と一致するから

$$p=1,\quad q=3$$

よって，$y=ax^2+bx+c$ のグラフは，頂点の座標が $(1,\ 3)$ で，2 次の係数が -2 だから

$$y=-2(x-1)^2+3=-2x^2+4x+1$$

$$\therefore \quad a=-2,\quad b=4,\quad c=1$$

別解 $y=2x^2$ のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると

$$y=2(x-1)^2-3=2x^2-4x-1$$

このグラフを x 軸に関して対称移動すると

$$y=-2x^2+4x+1$$

よって

$$a=-2,\quad b=4,\quad c=1$$

37 放物線 $y=x^2-2x-1$ を原点に関して対称移動した放物線の式は

$$-y=(-x)^2-2(-x)-1$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{y=-x^2-2x+1}}$$

1.3　2 次関数の決定

問題

38 2 次関数のグラフで，点 (0, 1) を通り，頂点の座標が (−2, 5) であるものは，$y = \boxed{}$ である。 (大阪薬科大)

39 (1) 2 次関数 $y = f(x)$ は，軸の方程式が $x = -1$ で，2 点(4, −3), (5, 8)を通る。$f(x)$ を求めよ。 (山口大)

(2) x 軸に接し，2 点 (2, 3)，(−1, 12) を通る放物線の方程式を求めよ。 (追手門学院大)

40 座標平面上において軸が y 軸に平行な放物線で，次の 3 点を通るものの方程式を求めよ。

(1) (0, −1)，(−2, 1)，(1, 4)

(2) (1, 0)，(3, 0)，(4, 9)

(3) (1, −1)，(3, −3)，(5, −13) (北海道医療大)

チェック・チェック

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ あるいは $y = a(x-p)^2 + q$ いずれの形においても未知数は 3 つあります。したがって，2 次関数を決定するためには**条件が 3 つ必要**です。

38 点 (0, 1) を通ること，頂点の x 座標が −2，頂点の y 座標が 5 であることで，3 つの条件がそろいます。$y = a(x-p)^2 + q$ の形で出発しましょう。

39 (1) 軸の方程式が与えられています。$y = a(x-p)^2 + q$ の形で出発しましょう。

(2) 2 次関数のグラフが x 軸に接するとは，頂点の y 座標が 0 ということです。$y = a(x-p)^2$ の形で出発しましょう。

40 (1) 点 (0, −1) を通るということは，y 切片が −1 ということです。
$y = ax^2 + bx - 1$ で出発しましょう。

(2) 2 点 (1, 0)，(3, 0) は x 軸との交点です。$y = a(x-1)(x-3)$ で出発しましょう。

(3) 3 つの通過点に図形的な特性はありません。$y = ax^2 + bx + c$ で出発しましょう。

解答・解説

38 頂点の座標が $(-2,\ 5)$ であることから，グラフの方程式は $y=a(x+2)^2+5$ とおける。このグラフが点 $(0,\ 1)$ を通ることから

$$1=4a+5 \qquad \therefore\quad a=-1$$

よって

$$y=-(x+2)^2+5=\underline{\boldsymbol{-x^2-4x+1}}$$

39 (1) 軸の方程式が $x=-1$ なので，グラフの方程式は

$$y=f(x)=a(x+1)^2+b$$

とおける。このグラフが 2 点 $(4,\ -3)$，$(5,\ 8)$ を通るので

$$\begin{cases} -3=25a+b \\ 8=36a+b \end{cases} \qquad \therefore\quad a=1,\quad b=-28$$

よって，求める $f(x)$ は

$$f(x)=(x+1)^2-28=\underline{\boldsymbol{x^2+2x-27}}$$

(2) x 軸に接することから，グラフの方程式は

$$y=p(x-q)^2 \quad (p\neq 0)$$

とおける。このグラフが，2 点$(2,\ 3)$，$(-1,\ 12)$を通ることから

$$3=p(2-q)^2 \quad \cdots\cdots①, \qquad 12=p(-1-q)^2 \quad \cdots\cdots②$$

$q=2$ とすると ① は成り立たないので，$q\neq 2$ である。このとき，② ÷ ① より

$$4=\frac{(q+1)^2}{(2-q)^2} \qquad 4(2-q)^2=(q+1)^2 \qquad \therefore\quad q=1,\ 5$$

これと ① より，$(p,\ q)=(3,\ 1)$，$\left(\frac{1}{3},\ 5\right)$ だから，求めるグラフの方程式は

$$\underline{\boldsymbol{y=3(x-1)^2,\quad y=\frac{1}{3}(x-5)^2}}$$

40 (1) 求める放物線は点 $(0,\ -1)$ を通るから，$y=ax^2+bx-1$ とおける。さらに，この放物線は 2 点 $(-2,\ 1)$，$(1,\ 4)$ を通ることから

$$\begin{cases} 1=4a-2b-1 \\ 4=a+b-1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$$

よって，求める放物線の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{y=2x^2+3x-1}}$$

(2) 求める放物線は x 軸と 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わることから，$y=a(x-1)(x-3)$ とおける。この放物線が点 $(4,\ 9)$ を通ることから

$$9=a(4-1)(4-3) \qquad \therefore \quad a=3$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=3(x-1)(x-3)=\underline{\boldsymbol{3x^2-12x+9}}$$

(3) 求める放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおく。
この放物線が 3 点 $(1,\ -1)$，$(3,\ -3)$，$(5,\ -13)$ を通ることから

$$\begin{cases} -1=a+b+c \\ -3=9a+3b+c \\ -13=25a+5b+c \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=-3 \end{cases}$$

よって，求める放物線の方程式は

$$\underline{\boldsymbol{y=-x^2+3x-3}}$$

1.4　2 次関数のグラフと x 軸との共有点

問題

41 2 次関数 $y = x^2 + (3k+5)x + 21$ のグラフは，x 軸と異なる 2 点で交わるという。1 つの交点の座標が $(7,\ 0)$ であるとき，他の交点の座標は $\boxed{}$ である。また，定数 k の値は $\boxed{}$ である。（八戸工業大）

42 2 つの 2 次関数 $y = 6x^2 + 2kx + k$，$y = -x^2 + (k-6)x - 1$ のグラフが両方とも x 軸と共有点をもたないような定数 k の値の範囲は $\boxed{} < k < \boxed{}$ である。（金沢工業大）

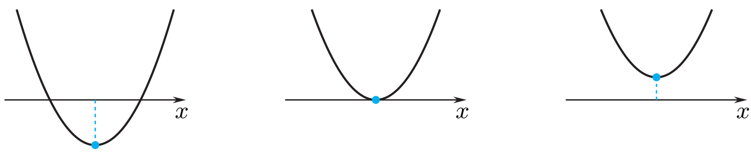
チェック・チェック

41 $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，方程式 $f(x) = 0$ の解です。k の値が決まれば，$f(x)$ を因数分解することにより，他の交点の x 座標も求まります。

42 $y = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$ のグラフと x 軸との位置関係は

- 異なる 2 点で交わる $\iff$ 頂点の y 座標 < 0
- 接する $\iff$ 頂点の y 座標 $= 0$
- 共有点をもたない $\iff$ 頂点の y 座標 > 0

となります。



解答・解説

41 2 次関数 $y=x^2+(3k+5)x+21$ のグラフが点 $(7,\ 0)$ を通ることから

$$0=49+(3k+5)\cdot 7+21 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{k=-5}}$$

このとき

$$y=x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$$

よって，他の交点の座標は　$\underline{\mathbf{(3,\ 0)}}$

42 2 つの 2 次式を平方完成すると

$$y=6x^2+2kx+k=6\left(x+\frac{k}{6}\right)^2-\frac{k^2}{6}+k \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=-x^2+(k-6)x-1=-\left(x-\frac{k-6}{2}\right)^2+\left(\frac{k-6}{2}\right)^2-1 \qquad \cdots\cdots ②$$

よって，2 つの放物線の頂点の y 座標はそれぞれ

$$-\frac{k^2}{6}+k, \quad \left(\frac{k-6}{2}\right)^2-1$$

であり，① のグラフは下に凸，② のグラフは上に凸であるから，条件をみたす k は

$$-\frac{k^2}{6}+k>0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{k-6}{2}\right)^2-1<0$$

$$k^2-6k<0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{k-6}{2}\right)^2<1$$

$$k(k-6)<0 \quad \text{かつ} \quad -1<\frac{k-6}{2}<1$$

$$\therefore \quad 0<k<6 \quad \text{かつ} \quad 4<k<8$$

よって，求める k の値の範囲は

$$\underline{\boldsymbol{4<k<6}}$$

1.5　放物線と直線の共有点

問題

43　放物線 $y=-(a^2+1)x^2+2ax+5$ が直線 $y=1$ の $1 \leqq x \leqq 2$ の部分と共有点をもつ定数 a の値の範囲を求めよ。（関西大）

44　曲線 $y=5-9x^2$，$-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1$ と直線 $y=m(x+1)$ とが共有点をもつのは $\boxed{} \leqq m \leqq \boxed{}$ のときである。（東京薬科大）

45　2 つの放物線 $C_1 : y=(x+2)^2$，$C_2 : y=6-(x-2)^2$ と，直線 $l : y=ax+b$ がある。a の値を決めたとき

「l が C_1，C_2 のどちらとも共有点をもたない」

ような b が存在するのは $\boxed{} < a < \boxed{}$ のときである。

（東京薬科大）

チェック・チェック

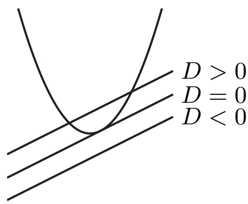
43　放物線と線分 $y=1$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ を同一平面上に図示してみましょう。

44　放物線 $y=ax^2+bx+c$ と直線 $y=mx+n$ が共有点をもつということは

方程式 $ax^2+bx+c=mx+n$ が実数解をもつ

ということですね。異なる実数解の個数と共有点の個数は，この 2 次方程式の判別式を D とすると，次のように対応します。

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
異なる実数解の個数	2 個	1 個	0 個
共有点の個数	2 個	1 個	0 個



なお，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，
$D=b^2-4ac$ を，この 2 次方程式の**判別式**といいます。

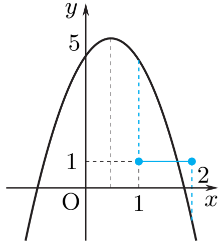
45　「a の値を決めたとき，～をみたす b が存在する」という表現に注意しましょう。第 3 章の **91**，**92** も参照して下さい。

解答・解説

43　$f(x)=-(a^2+1)x^2+2ax+5$ とおく。

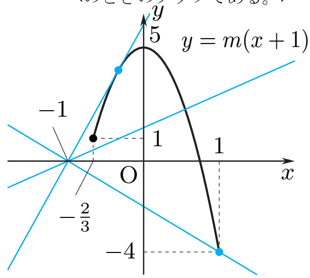
$-(a^2+1)<0$ より，$y=f(x)$ のグラフは上に凸であり，さらに $f(0)=5>1$ より放物線 $y=f(x)$ が線分 $y=1\ (1 \leqq x \leqq 2)$ と共有点をもつ条件は

$$f(1) \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad f(2) \leqq 1$$
$$-a^2+2a+4 \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad -4a^2+4a+1 \leqq 1$$
$$(a+1)(a-3) \leqq 0 \quad \text{かつ} \quad a(a-1) \geqq 0$$
$$-1 \leqq a \leqq 3 \quad \text{かつ「} a \leqq 0 \text{ または } 1 \leqq a \text{」}$$
$$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 0,\ 1 \leqq a \leqq 3}}$$



（これは 軸：$x=\dfrac{a}{a^2+1}>0$ のときのグラフである。）

44　直線 $y=m(x+1)$ は点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾きが m の直線であり，右図のようになる。



放物線の $-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 1$ の部分と直線が共有点をもつのは，直線が点 $(1,\ -4)$ を通るときと放物線と接するときの間（両端も含む）にあるときである。

直線が点 $(1,\ -4)$ を通るとき，その傾き m は

$$-4=m(1+1) \qquad \therefore \quad m=-2$$

放物線と直線が接するときは，2 つの方程式を連立すると

$$5-9x^2=m(x+1) \text{ すなわち } 9x^2+mx+m-5=0$$

はただ 1 つの実数解をもつから，（判別式）$=0$ であり

$$m^2-4\cdot 9(m-5)=0 \qquad (m-6)(m-30)=0 \qquad \therefore \quad m=6,\ 30$$

すると，接点の x 座標は $-\dfrac{m}{18}$ で

$$-\frac{2}{3} \leqq -\frac{m}{18} \leqq 1 \qquad \therefore \quad -18 \leqq m \leqq 12$$

これより $m=6$ であり，求める m の範囲は　$\underline{\boldsymbol{-2 \leqq m \leqq 6}}$

45　C_1，C_2 と l の方程式を連立すると

$$x^2+4x+4=ax+b \text{ すなわち } x^2+(4-a)x+4-b=0$$
$$6-(x^2-4x+4)=ax+b \text{ すなわち } x^2+(a-4)x+b-2=0$$

どちらも実数解をもたないから，ともに（判別式）<0 より

$$\begin{cases} (4-a)^2-4(4-b)<0 \\ (a-4)^2-4(b-2)<0 \end{cases} \qquad \therefore \quad a^2-8a+24<4b<-a^2+8a$$

これをみたす b が存在する条件は

$$a^2-8a+24<-a^2+8a \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{2<a<6}}$$

1.6　放物線により切り取られる線分の長さ

問題

46 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフが，x 軸から切り取る線分の長さが 1 で，点 $(3,\ 2)$ を通るとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ。（崇城大）

47 2 次関数 $y=\dfrac{9}{4}x^2+ax+b$ のグラフを C とし，C が 2 点$(0,\ 4)$と$(2,\ k)$を通るとする。このとき，$a=\dfrac{k-\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$b=\boxed{\text{エ}}$ である。

グラフ C が x 軸と 2 点 A，B で交わり，線分 AB の長さが 2 以上となる k の範囲は $k\leqq\boxed{\text{オカ}}$，$\boxed{\text{キク}}\leqq k$ である。（センター試験）

チェック・チェック

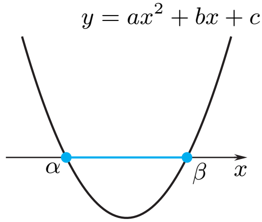
46，**47** 放物線 $y=ax^2+bx+c$ と x 軸との交点の x 座標を $\alpha,\ \beta$（$\alpha<\beta$）とすると，$\alpha,\ \beta$ は

方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる 2 つの実数解

です。これは x 軸：$y=0$ と放物線の方程式が同時に成り立つことから

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ y=0 \end{cases}$$

という連立方程式の解として x 軸との交点を求めているわけですね。このとき，放物線により切り取られる線分の長さは $\boldsymbol{\beta-\alpha}$ になります。



解答・解説

46 $y=x^2+ax+b$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は $x^2+ax+b=0$ の異なる 2 つの実数解である。この判別式 D について，$D>0$ より

$$a^2-4b>0 \quad \cdots\cdots ①$$

このもとで，交点の x 座標は

$$x^2+ax+b=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

であるから，x 軸から切り取る線分の長さが 1 より

$$\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}=1 \qquad \therefore \quad \sqrt{a^2-4b}=1$$

両辺を 2 乗して

$$a^2-4b=1 \quad \cdots\cdots ②$$

また，$y=x^2+ax+b$ のグラフが点 $(3,\ 2)$ を通るとき

$$2=9+3a+b \qquad \therefore \quad b=-3a-7 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ より b を消去して

$$a^2-4(-3a-7)=1 \qquad \therefore \quad a=-9,\ -3$$

これらと ③ より $(a,\ b)=(-9,\ 20),\ (-3,\ 2)$ であり，これらは ① をみたすから

$$\underline{\boldsymbol{(a,\ b)=(-9,\ 20),\quad (-3,\ 2)}}$$

47 $C: y=\dfrac{9}{4}x^2+ax+b$ が点 $(0,\ 4)$，$(2,\ k)$ を通ることから

$$\begin{cases} b=4 \\ k=9+2a+b \end{cases} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{a=\frac{k-13}{2},\ b=4}}$$

このとき，A，B の x 座標は，2 次方程式

$$\frac{9}{4}x^2+\frac{k-13}{2}x+4=0 \text{ すなわち } 9x^2+2(k-13)x+16=0$$

の異なる 2 つの実数解である。この判別式 D について，$D'=\dfrac{D}{4}$ とおくと

$$D'>0 \qquad (k-13)^2-9\cdot16>0 \qquad \therefore \quad k<1,\quad 25<k \quad \cdots\cdots ①$$

このもとで，$\mathrm{AB}\geqq 2$ より

$$\frac{-(k-13)+\sqrt{D'}}{9}-\frac{-(k-13)-\sqrt{D'}}{9}\geqq 2 \qquad \therefore \quad \sqrt{k^2-26k+25}\geqq 9$$

両辺を 2 乗して

$$k^2-26k+25\geqq 81 \qquad \therefore \quad k\leqq -2,\quad 28\leqq k$$

これは ① をみたすから $\quad \underline{\boldsymbol{k\leqq -2,\quad 28\leqq k}}$

1.7　2 つの放物線の共有点

問題

48 2 次関数 $y=x^2$ と $y=-x^2+bx-b$ の 2 つのグラフが共有点をもたないときの b の値の範囲は $\boxed{} < b < \boxed{}$ である。また，$b>0$ のとき上の 2 つのグラフが互いに接するのは $b=\boxed{}$ のときで，その接点の座標は $\boxed{}$ である。（摂南大）

49 2 つの曲線 $y=(x-1)^2-a$ と $y=a(x+1)^2+1$ が共有点をもつのは

$$\boxed{}-\sqrt{\boxed{}} \leqq a \leqq \boxed{}+\sqrt{\boxed{}}$$

のときである。（大阪電気通信大）

チェック・チェック

48, **49** 2 つの放物線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点を求めるということは

連立方程式 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$

を解くということです。したがって，**共有点の個数**を調べるには

方程式：$f(x)=g(x)$

の**実数解の個数**を調べるということになります。とくに，これが 2 次方程式のときは**判別式の符号**を調べることになります。

解答・解説

48 $y=x^2$ $\cdots\cdots$①，$y=-x^2+bx-b$ $\cdots\cdots$②

① と ② を連立して　$2x^2-bx+b=0$ $\cdots\cdots$③

判別式を D とすると　$D=b^2-8b=b(b-8)$

①と②のグラフが**共有点をもたない**

$\iff$ ③が**実数解をもたない**

$\iff$ $\boldsymbol{D<0}$　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{0<b<8}}$

$b>0$ で①，②のグラフが接するのは $D=0$ より　$\underline{\boldsymbol{b=8}}$

このとき，③より

$2x^2-8x+8=0$　$(x-2)^2=0$　$\therefore$　$x=2$

①より $y=4$ であり，接点の座標は　$\underline{\boldsymbol{(2,\ 4)}}$

49 $y=(x-1)^2-a$ $\cdots\cdots$①，$y=a(x+1)^2+1$ $\cdots\cdots$②

① と ② を連立して　$(1-a)x^2-2(1+a)x-2a=0$ $\cdots\cdots$③

(i) $a=1$ のとき，③ は $-4x-2=0$ となる。

よって，実数解 $x=-\dfrac{1}{2}$ をもつ。

(ii) $a\neq1$ のとき，③は x の 2 次方程式であり，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(1+a)^2+2a(1-a)=-a^2+4a+1$$

2 つの曲線が共有点をもつのは

$$\frac{D}{4}\geqq0 \qquad \therefore\quad 2-\sqrt{5}\leqq a\leqq2+\sqrt{5}\quad (a\neq1)$$

(i)，(ii) を合わせて　$\underline{\boldsymbol{2-\sqrt{5}\leqq a\leqq2+\sqrt{5}}}$

1.8 絶対値のついた 2 次関数のグラフ

問題

50 曲線 $y=2|x^2-4x+3|$ と直線 $y=3x-6$ との交点の座標は
$\left(\boxed{},\ \boxed{}\right),\ \left(\boxed{},\ \boxed{}\right)$ である。（湘南工科大）

51 曲線 $y=2|x^2-4x+3|+2$ と点 $(0,\ 1)$ を通る直線が 4 点で交わるときの直線の傾き m の範囲を求めよ。（吉備国際大）

52 $y=\left|x^2-2|x|\right|$ と $y=k$ のグラフが最も多くの異なる共有点をもつための実数 k の条件は $\boxed{}$ である。（芝浦工業大）

チェック・チェック

50 $y=2|x^2-4x+3|$ のグラフは $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ より

$$y=2|x^2-4x+3|=\begin{cases}2(x-1)(x-3) & (x\leqq 1,\ 3\leqq x)\\ -2(x-1)(x-3) & (1<x<3)\end{cases}$$

と場合分けし，絶対値をはずしてかくことができますが

$$y=2(x-1)(x-3)$$

のグラフで，**$y<0$ の部分を x 軸に関して正の方向に折り返したもの** と考えれば，直ちに絶対値つきのグラフはかけますね。

51 $y=2|x^2-4x+3|+2$ と点 $(0,\ 1)$ を通り傾きが m の直線 $y=mx+1$ の共有点の座標は

$$\begin{cases}y=2|x^2-4x+3|+2\\ y=mx+1\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}2|x^2-4x+3|+2=mx+1\\ y=mx+1\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}2|x^2-4x+3|=mx-1\\ y=mx+1\end{cases}$$

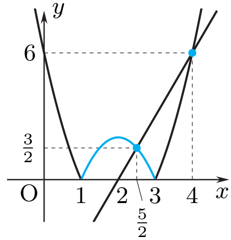
なので，曲線 $y=2|x^2-4x+3|$ と直線 $y=mx-1$ が 4 点で交わるとき m の範囲を調べればよいことになります。

52 $y=\left|x^2-2|x|\right|$ のグラフは $y=x^2-2|x|$ のグラフの **$y<0$ の部分を x 軸に関して正の方向に折り返したもの**です。

また，$y=x^2-2|x|$ は偶関数（$f(-x)=f(x)$ をみたす関数）なので，グラフは y 軸に関して対称であり，$y=x^2-2x\ (x\geqq 0)$ を y 軸に関して折り返したグラフと合わせることにより，グラフを得ることができます。

解答・解説

50 $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$ より



(i) $x \leqq 1,\ x \geqq 3$ のとき

$y=2(x^2-4x+3)$ と $y=3x-6$ のグラフの交点は

$$2x^2-8x+6=3x-6 \qquad \therefore \quad (2x-3)(x-4)=0$$

$x \leqq 1,\ x \geqq 3$ より

$$x=4 \qquad \therefore \quad y=3\cdot 4-6=6$$

(ii) $1<x<3$ のとき

$y=-2(x^2-4x+3)$ と $y=3x-6$ のグラフの交点は

$$-2x^2+8x-6=3x-6 \qquad \therefore \quad -x(2x-5)=0$$

$1<x<3$ より

$$x=\frac{5}{2} \qquad \therefore \quad y=3\cdot\frac{5}{2}-6=\frac{3}{2}$$

したがって，求める交点の座標は　$\underline{\boldsymbol{(4,\ 6),\ \left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)}}$

51 $y=2|x^2-4x+3|+2$ ……①　とし，点 $(0,\ 1)$ を通る直線の方程式を $y=mx+1$ ……②　とする。① と ② を連立して

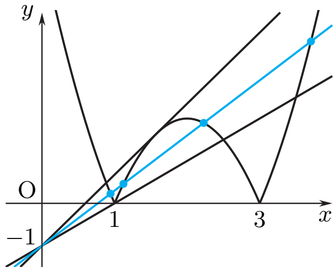
$$2|x^2-4x+3|+2=mx+1 \qquad \therefore \quad 2|(x-1)(x-3)|=mx-1 \quad \cdots\cdots ③$$

ここで

$$y=2|(x-1)(x-3)| \quad \cdots\cdots ④$$
$$y=mx-1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

とおくと

①，② のグラフが 4 点で交わる
$\Longleftrightarrow$ ③ が異なる 4 つの実数解をもつ
$\Longleftrightarrow$ ④，⑤ のグラフが 4 点で交わる



⑤ が点 $(1,\ 0)$ を通るとき

$$0=m-1 \qquad \therefore \quad m=1$$

⑤ が $y=-2(x-1)(x-3)$ のグラフと $1 \leqq x \leqq 3$ において接するとき

$$-2(x-1)(x-3)=mx-1 \text{ すなわち } 2x^2+(m-8)x+5=0$$

の判別式を D とすると $D=0$ より

$$(m-8)^2-40=0 \qquad \therefore \quad m=8\pm 2\sqrt{10}$$

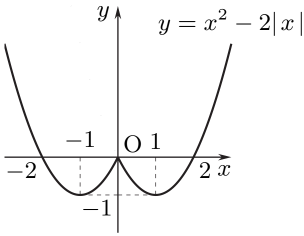
このとき，接点の x 座標は $x=-\dfrac{m-8}{4}$ なので

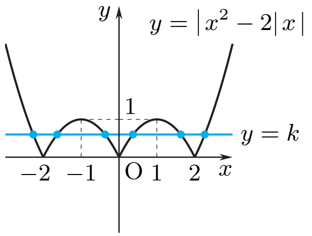
$$1 \leqq -\frac{m-8}{4} \leqq 3 \text{ すなわち } -4 \leqq m \leqq 4 \qquad \therefore \quad m=8-2\sqrt{10}$$

よって，求める m の範囲は　$\underline{\boldsymbol{1<m<8-2\sqrt{10}}}$

52 $y = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 & (x \geqq 0) \\ x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 & (x < 0) \end{cases}$

なので，$y = |x^2 - 2|x||$ のグラフは下の右図のようになる。





これより，$\underline{\boldsymbol{0 < k < 1}}$ のときに $y = k$ との共有点は 6 個となり最も多くなる。

2　最大・最小

2.1　1 次関数の最大・最小

問題

53　1 次関数 $y = ax + b$ の $-3 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 6，最小値が -2 であるとき，定数 a，b の値をすべて求めよ。　（北海道医療大）

54　1 次関数 $f(x) = ax + b$ で，次の条件

$$3 \leqq f(1) \leqq 6, \quad 4 \leqq f(2) \leqq 8$$

をみたすものを考える。

このような 1 次関数 $f(x)$ のなかで，$f(5)$ が最大となるのは $a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ のときで，$f(5) = \boxed{}$ である。また，$f(5)$ が最小となるのは $a = \boxed{}$，$b = \boxed{}$ のときで，$f(5) = \boxed{}$ である。　（上智大）

55　a は定数で，$1 < a < 2$ をみたすとき，関数

$$f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$$

は，$x = \boxed{}$ で，最小値 $\boxed{}$ をとる。　（神戸薬科大）

チェック・チェック

53　**1 次関数** $y = ax + b$ と与えられているので，$a \neq 0$ が前提となっています。

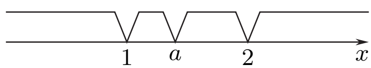
また，1 次関数 $y = ax + b$ は

$a > 0$ のとき，単調増加
$a < 0$ のとき，単調減少

です。

54　1 次関数 $y = ax + b$ のグラフは 2 点 $(1,\ f(1))$，$(2,\ f(2))$ を通る直線です。$f(1)$，$f(2)$ を与えられた範囲でとりながら，直線を動かしてみましょう。

55　$y = f(x)$ のグラフは折れ線となります。$1 < a < 2$ より，右図の 4 通りに場合分けして絶対値をはずしましょう。



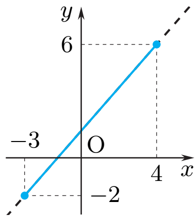
解答・解説

53　$f(x)=ax+b$ とおく。$f(x)$ は 1 次関数より $a \neq 0$ である。

(i)　$a>0$ のとき

1 次関数 $f(x)$ は単調増加であり，$-3 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $f(4)$，最小値は $f(-3)$ だから

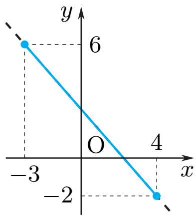
$$\begin{cases} f(4)=4a+b=6 \\ f(-3)=-3a+b=-2 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=\dfrac{8}{7}} \\ \boldsymbol{b=\dfrac{10}{7}} \end{cases}}$$



(ii)　$a<0$ のとき

1 次関数 $f(x)$ は単調減少であり，$-3 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $f(-3)$，最小値は $f(4)$ だから

$$\begin{cases} f(-3)=-3a+b=6 \\ f(4)=4a+b=-2 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=-\dfrac{8}{7}} \\ \boldsymbol{b=\dfrac{18}{7}} \end{cases}}$$



54　$f(5)$ が最大となるのは，直線 $y=ax+b$ が 2 点 $(1,\ 3)$，$(2,\ 8)$ を通るときであるから

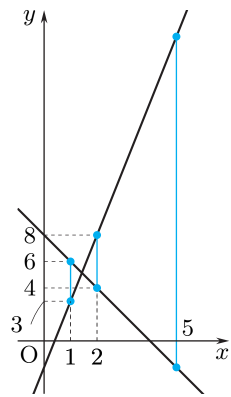
$$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a+b=8 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=5} \\ \boldsymbol{b=-2} \end{cases}}$$

このとき　　$f(5)=5\cdot 5-2=\underline{\boldsymbol{23}}$

$f(5)$ が最小となるのは，直線 $y=ax+b$ が 2 点 $(1,\ 6)$，$(2,\ 4)$ を通るときであるから

$$\begin{cases} a+b=6 \\ 2a+b=4 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=-2} \\ \boldsymbol{b=8} \end{cases}}$$

このとき　　$f(5)=-2\cdot 5+8=\underline{\boldsymbol{-2}}$



55 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$，$1 < a < 2$ より

(i) $x < 1$ のとき

$$f(x) = -(x-1) - (x-2) - (x-a) = -3x + 3 + a$$

(ii) $1 \leqq x < a$ のとき

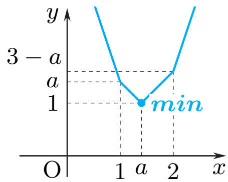
$$f(x) = (x-1) - (x-2) - (x-a) = -x + 1 + a$$

(iii) $a \leqq x < 2$ のとき

$$f(x) = (x-1) - (x-2) + (x-a) = x + 1 - a$$

(iv) $x \geqq 2$ のとき

$$f(x) = (x-1) + (x-2) + (x-a) = 3x - 3 - a$$



したがって，$f(x)$ は

$x \leqq a$ のとき単調減少，$x \geqq a$ のとき単調増加

であり，$\underline{\boldsymbol{x = a}}$ で最小値 $\underline{\mathbf{1}}$ をとる。

2.2　2 次関数の最大・最小

問題

56 (1) 2 次関数 $y = x^2 - 2x - 2$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。（長崎総合科学大）

(2) x の範囲が $-4 \leqq x \leqq -1$ のとき，2 次関数 $y = -x^2 - 6x - 1$ の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である。（法政大）

57 2 次関数 $y = x^2 - 4x + c$ の $-3 \leqq x \leqq 5$ における最大値が 17 であるという。このとき定数 c の値は $\boxed{}$ であり，y の最小値は $\boxed{}$ である。（北海道工業大）

58 2 次関数 $y = x^2 + ax + a$ の最小値を $m(a)$ とすると，$m(a) = \boxed{}$ である。ここで a をいろいろ動かしたとき，$m(a)$ が最大になるのは $a = \boxed{}$ のときであり，$m(a)$ の最大値は $\boxed{}$ である。（桐蔭横浜大　改）

チェック・チェック

56 定義域が与えられたときの 2 次関数の最大値，最小値を求める問題です。

頂点の座標，軸の方程式がわかるように変形して，グラフをかくクセをつけましょう。(1) は下に凸，(2) は上に凸のグラフになります。

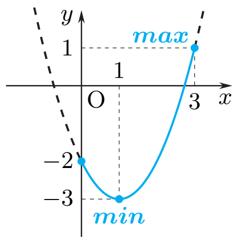
57 グラフは下に凸であり，定義域の端点 $x = -3$ と $x = 5$ のどちらが軸 $x = 2$ から離れているかを比較すれば，最大となるときの x の値が決まります。

58 x を実数全体で動かしたときの最小値 $m(a)$ は a の 2 次関数となり，この 2 次関数 $m(a)$ について a を実数全体で動かしたときの最大値を求めるという問題です。“ 最小値の最大値 ”，ややこしい言い方かもしれませんが，最小値として可能な値のうち一番大きい値はいくらかという問題ですね。

解答・解説

56 (1) $y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$

より，$0 \leqq x \leqq 3$ におけるグラフは右図のようになる。

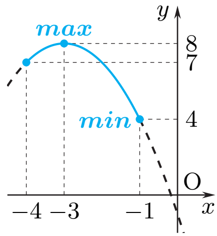


$x=3$ のとき，最大値 1

$x=1$ のとき，最小値 -3

(2) $y=-x^2-6x-1=-(x+3)^2+8$

より，$-4 \leqq x \leqq -1$ におけるグラフは右図のようになる。



$x=-3$ のとき，最大値 **8**

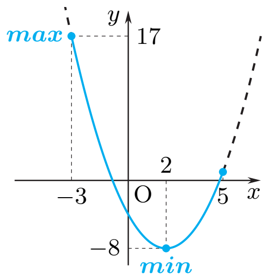
$x=-1$ のとき，最小値 **4**

57 $f(x)=x^2-4x+c$ とおくと

$f(x)=x^2-4x+c=(x-2)^2+c-4$

$y=f(x)$ のグラフの軸が $x=2$ なので，$-3 \leqq x \leqq 5$ における最大値は $f(-3)$ である。最大値が 17 より

$f(-3)=21+c=17$ $\therefore$ $\boldsymbol{c=-4}$



このとき，最小値は $f(2)=c-4$ であるから

最小値 $f(2)=\boldsymbol{-8}$

58 $y=x^2+ax+a=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$

グラフは下に凸の放物線だから，最小値は $\boldsymbol{m(a)=-\dfrac{a^2}{4}+a}$ である。

さらに

$$m(a)=-\frac{a^2}{4}+a=-\frac{1}{4}(a-2)^2+1$$

より，$m(a)$ は $\boldsymbol{a=2}$ のとき最大となり，このときの $m(a)$ の最大値は **1** である。

2.3　2 次関数の最大・最小（場合分け，置き換え）

問題

59 定義域を $1 \leqq x \leqq 4$ とする関数 $f(x) = ax^2 - 4ax + 2a + b$ の最大値が 9，最小値が 1 のとき，a，b の値を求めよ。（岡山理科大）

60 関数 $f(x) = x^2 + ax - 2a + 6$ の $x \geqq 0$ における最小値が 1 であるとき，a の値を求めよ。（岩手大）

61 2 次関数 $f(x) = x^2 - 10x + a$ について

(1) $a \leqq x \leqq a+1$ における $f(x)$ の最大値 $g(a)$ を求めよ。

(2) $a \leqq x \leqq a+1$ における $f(x)$ の最小値 $h(a)$ を求めよ。（東北学院大）

62 関数 $y = (x^2+2x+3)(-x^2-2x+1)-2x^2-4x-1$ は，$x^2+2x = t$ とおくと，t の式で $y = \boxed{}$ と表される。また，y の最大値は $\boxed{}$ である。（東京歯科大）

チェック・チェック

59 まずは **$a = 0$，$a \neq 0$ の場合分け**が必要です。さらに，$a \neq 0$ のときは $a > 0$，$a < 0$ により $y = f(x)$ のグラフが**下に凸**，**上に凸**と分かれます。

60 **軸：$x = -\dfrac{a}{2}$ が定義域 $x \geqq 0$ の中にあるか否かの場合分け**が必要です。

$y = f(x)$ のグラフは下に凸なので

軸が定義域の中にあるときは，頂点の y 座標が最小値
軸が定義域の中にないときは，軸に近いところで最小値

となります。

61 軸の位置は固定されていて，定義域が動くというタイプの最大・最小問題です。

$y = f(x)$ のグラフは下に凸なので

(1) 最大値については，**定義域の中点と軸 $x = 5$ の位置**を比較します。

(2) 最小値については，**軸 $x = 5$ が定義域の右側，定義域の内側，定義域の左側**の 3 つに場合分けします。

62 $y = f(x)$ は x が実数全体を動くときの関数ですが，$x^2 + 2x = t$ とおいたときの t の関数 y は $t = (x+1)^2 - 1 \geqq -1$ より $t \geqq -1$ の範囲で定義される関数です。このように，置き換えたあとの変数 **t の変域**に注意しましょう。

解答・解説

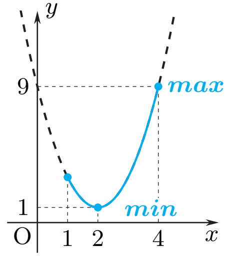
59 (i) $a=0$ のとき
$f(x)=b$ となり，$f(x)$ は一定の値 b をとる。よって，最大値が 9，最小値が 1 となることはないので不適。

(ii) $a \neq 0$ のとき
$f(x)$ は 2 次関数であり

$$f(x)=ax^2-4ax+2a+b=a(x-2)^2-2a+b$$

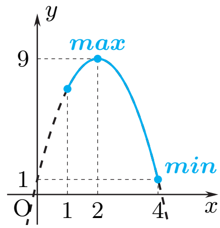
(ア) $a>0$ のとき
関数 $y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，$1 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $f(4)$，最小値は $f(2)$ である。

$$\begin{cases} f(4)=2a+b=9 \\ f(2)=-2a+b=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=2} \\ \boldsymbol{b=5} \end{cases}}$$



(イ) $a<0$ のとき
関数 $y=f(x)$ のグラフは上に凸であり，$1 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $f(2)$，最小値は $f(4)$ である。

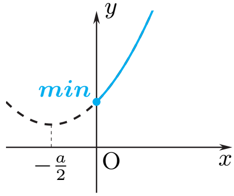
$$\begin{cases} f(2)=-2a+b=9 \\ f(4)=2a+b=1 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\begin{cases} \boldsymbol{a=-2} \\ \boldsymbol{b=5} \end{cases}}$$



60 $f(x)=x^2+ax-2a+6=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-2a+6$

(i) $-\dfrac{a}{2}<0$ すなわち $a>0$ のとき
関数 $f(x)$ の $x \geqq 0$ における最小値は $f(0)$ だから

$$-2a+6=1 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{a=\frac{5}{2}}}$$

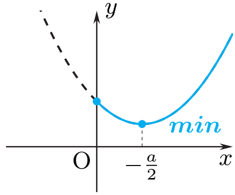


(ii) $-\dfrac{a}{2} \geqq 0$ すなわち $a \leqq 0$ のとき
関数 $f(x)$ の $x \geqq 0$ における最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)$ だから

$$-\frac{a^2}{4}-2a+6=1$$

$$a^2+8a-20=0 \qquad \therefore \quad a=-10,\ 2$$

$a \leqq 0$ より　$\underline{\boldsymbol{a=-10}}$



61 $f(x)=x^2-10x+a=(x-5)^2-25+a$

より頂点の座標は $(5,\ a-25)$ であり，グラフは下に凸だから

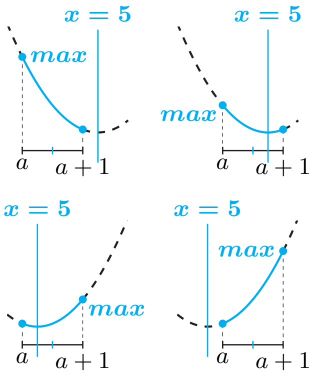
(1) $a \leqq x \leqq a+1$ のとき，最大値 $g(a)$ は

(i) $\dfrac{2a+1}{2} \leqq 5$ すなわち $\boldsymbol{a \leqq \dfrac{9}{2}}$ **のとき**

$g(a)=f(a)=\boldsymbol{a^2-9a}$

(ii) $\dfrac{2a+1}{2} > 5$ すなわち $\boldsymbol{\dfrac{9}{2} < a}$ **のとき**

$g(a)=f(a+1)=\boldsymbol{a^2-7a-9}$



(2) $a \leqq x \leqq a+1$ のとき，最小値 $h(a)$ は

(i) $a+1<5$ すなわち $\boldsymbol{a<4}$ **のとき**

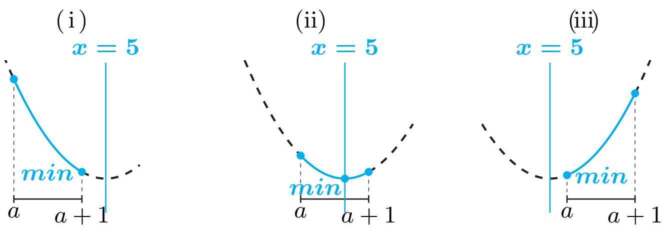
$h(a)=f(a+1)=\boldsymbol{a^2-7a-9}$

(ii) $a \leqq 5 \leqq a+1$ すなわち $\boldsymbol{4 \leqq a \leqq 5}$ **のとき**

$h(a)=f(5)=\boldsymbol{a-25}$

(iii) $\boldsymbol{5<a}$ **のとき**

$h(a)=f(a)=\boldsymbol{a^2-9a}$



62 $y=\{(x^2+2x)+3\}\{-(x^2+2x)+1\}-2(x^2+2x)-1$

$=(t+3)(-t+1)-2t-1$

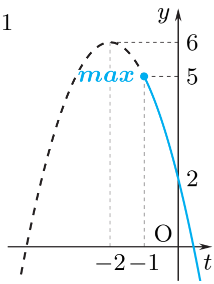
$=\boldsymbol{-t^2-4t+2}$

$=-(t+2)^2+6$

また，$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$ より，$t \geqq -1$ であり，

$t \geqq -1$ におけるグラフは右図のようになる。

よって，y は $t=-1$ のとき，最大値 **5** をとる。



2.4　2 変数関数の最大・最小

問題

63 以下の問いに答えよ。

(1) x，y の関数 $P = x^2 + 3y^2 + 4x - 6y + 2$ の最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を示せ。

(2) $0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$ のとき，(1) の関数 P の最大値および最小値を求めよ。また，それぞれの場合の x，y の値を示せ。

(3) x，y の関数 $Q = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2x + 2y + 2$ の最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を示せ。（豊橋技術科学大）

64 $x^2 + y^2 = 1$ であるとき，$x^2 + 4y$ は $(x,\ y) = (\boxed{},\ \boxed{})$ のとき最大値 $\boxed{}$ をとり，$(x,\ y) = (\boxed{},\ \boxed{})$ のとき最小値 $\boxed{}$ をとる。（東海大）

65 2 つの実数 x，y が，$x^2 + y^2 = 2$ を満たすものとする。このとき

(1) $x + y$ の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。

(2) xy の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。

(3) $(x-1)(y-1)$ の最大値は $\boxed{}$ であり，最小値は $\boxed{}$ である。

（成蹊大）

チェック・チェック

63 (1) x，y それぞれについて平方完成しましょう。

(2) 2 変数関数の最小値を求めるには，**まず，一方を固定し，もう一方の変数についての関数とみて**最小値を求める。次に，固定してあった変数を動かして最小値を求める。すなわち，最小値の最小値を考えるわけです。

最大値についても同じく，最大値の最大値と考えていきます。

(3) xy という項がありますが，まずは x について平方完成し，さらに，y について平方完成しましょう。

64 x を消去しますが，x は実数なので

$$x^2 = 1 - y^2 \geqq 0 \qquad \therefore \quad -1 \leqq y \leqq 1$$

として，消去した文字 x についての条件を y に置き換えておかなければなりません。

$(x,\ y) = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおく方法もあります。

65 (1) では，$x + y = s$ とおいてみましょう。

(2) では，$xy = t$ とおき，t を s で表します。

(3) も s で表すことができます。

$(x,\ y) = (\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta)$ とおく方法もありますが，数学 II の内容が必要となります。

解答・解説

63 (1) まず y を固定して与式を変形すると

$$P = (x+2)^2 + 3y^2 - 6y - 2 \quad \cdots\cdots ①$$
$$= (x+2)^2 + 3(y-1)^2 - 5$$

よって，P は

<u>$\boldsymbol{x=-2}$，$\boldsymbol{y=1}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-5}$</u>

をとる。

(2) (i) 最小値について

まず y を固定して，x を動かす。$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，① より P は

$x=0$ のとき，最小値 $m = 3y^2 - 6y + 2$

次に，y を動かす。この最小値 m を変形すると

$$m = 3y^2 - 6y + 2 = 3(y-1)^2 - 1$$

$0 \leqq y \leqq 3$ より，m は $y=1$ のとき，最小値 -1 をとるから，P は

<u>$\boldsymbol{x=0}$，$\boldsymbol{y=1}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-1}$</u>

をとる。

(ii) 最大値について

まず y を固定して，x を動かす。$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，① より P は

$x=3$ のとき，最大値 $M = 3y^2 - 6y + 23$

次に，y を動かす。最大値 M を変形すると

$$M = 3y^2 - 6y + 23 = 3(y-1)^2 + 20$$

$0 \leqq y \leqq 3$ より，M は $y=3$ のとき，最大値 32 をとるから，P は

<u>$\boldsymbol{x=3}$，$\boldsymbol{y=3}$ **のとき，最大値 32**</u>

をとる。

(3) Q を変形すると

$$Q = x^2 - 2(3y+1)x + 10y^2 + 2y + 2$$
$$= \{x-(3y+1)\}^2 + y^2 - 4y + 1$$
$$= \{x-(3y+1)\}^2 + (y-2)^2 - 3$$

よって，Q は $x = 3y+1$ かつ $y=2$ のとき最小値をとるから

<u>$\boldsymbol{x=7}$，$\boldsymbol{y=2}$ **のとき，最小値** $\boldsymbol{-3}$</u>

をとる。

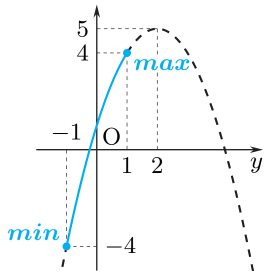
64 $x^2+y^2=1$ より $x^2=1-y^2$ であるから

$$x^2+4y=(1-y^2)+4y=-(y-2)^2+5$$

$x^2=1-y^2\geqq 0$ より，$-1\leqq y\leqq 1$ だから

$\underline{\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ 1)}}$ のとき，最大値 $\underline{\mathbf{4}}$

$\underline{\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ -1)}}$ のとき，最小値 $\underline{\mathbf{-4}}$



別解 $(x,\ y)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおいてもよい（数学II）。

$$x^2+4y=\cos^2\theta+4\sin\theta=(1-\sin^2\theta)+4\sin\theta$$
$$=-(\sin\theta-2)^2+5$$

65 (1) $x+y=s$ とおくと $y=s-x$ であり，これを $x^2+y^2=2$ に代入すると

$$x^2+(s-x)^2=2 \text{ すなわち } 2x^2-2sx+s^2-2=0$$

x は実数だから，この x の 2 次方程式の判別式 D について

$$\frac{D}{4}=s^2-2(s^2-2)\geqq 0 \qquad \therefore\quad -2\leqq s\leqq 2$$

よって，$s=x+y$ の

最大値 $\underline{\mathbf{2}}$，最小値 $\underline{\mathbf{-2}}$

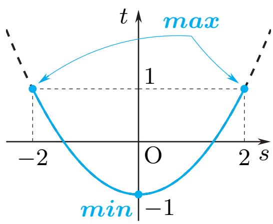
(2) $xy=t$ とおくと

$$s^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=2+2t$$

$$\therefore\quad t=\frac{s^2-2}{2}=\frac{1}{2}s^2-1$$

(1) より $-2\leqq s\leqq 2$ だから，$t=xy$ の

最大値 $\underline{\mathbf{1}}$ $(s=-2,\ 2)$，最小値 $\underline{\mathbf{-1}}$ $(s=0)$

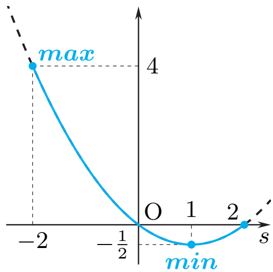


(3) $(x-1)(y-1)=xy-(x+y)+1$

$$=\frac{s^2-2}{2}-s+1$$
$$=\frac{1}{2}(s-1)^2-\frac{1}{2}$$

(1) より $-2\leqq s\leqq 2$ だから，$(x-1)(y-1)$ の

最大値 $\underline{\mathbf{4}}$ $(s=-2)$，最小値 $\underline{\boldsymbol{-\frac{1}{2}}}$ $(s=1)$



別解 $(x,\ y)=(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta)$ とおいてもよい（数学II）。

(1) $x+y=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=2\sin(\theta+45^\circ)$

(2) $xy=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$

2.5　2 次関数の応用問題

問題

66 3 辺の長さが AB = 3，BC = 4，CA = 5 である三角形 ABC において，辺 AB 上に点 P，辺 BC 上に点 Q，辺 CA 上に点 R を AP = BQ = CR = x となるようにとるとき，三角形 PQR の面積が最小となる x の値は $\boxed{}$ である。（中京大）

67 長さ 30cm の針金がある。これを 2 つに切り，それぞれを折り曲げて正三角形と正六角形を作る。これら 2 つの図形の面積の和 S を最小にするには針金をどのように切ればよいか。また，S の最小値を求めよ。（島根大）

68 放物線 $y = 16 - 4x^2$ と x 軸で囲まれた部分に内接する長方形を作る。ただし長方形の 1 辺は x 軸上にあるものとする。この長方形の周の長さの最大値は $\boxed{}$ である。また，このときの長方形の面積は $\boxed{}$ である。（大阪産業大）

69 周囲の長さが 40cm で，面積が 64cm^2 以上の長方形を作りたい。この長方形の 1 辺の長さの最大値は $\boxed{}$ cm，最小値は $\boxed{}$ cm である。（大阪産業大）

70 ある製品は単価が 250 円のとき 1 日の売上個数が 200 個であり，1 円値下げするごとに 4 個多く売れる。

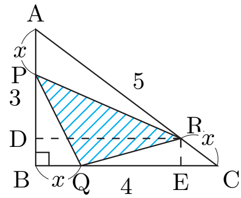
(1) 1 日の売上高が最大となるときの単価 a（円）を求めよ。また，売上高の最大値 M（円）を求めよ。

(2) 1 日の売上高が 80000 円以上となるときの単価 a（円）の範囲を求めよ。

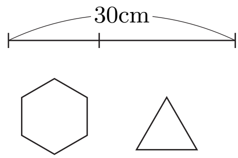
（北海学園大）

チェック・チェック

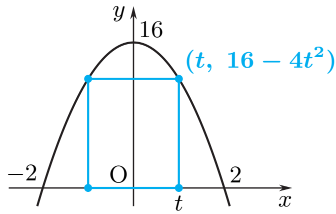
66 三角形 PQR の面積を直接考えるのはツライ。三角形 ABC から余分な 3 つの三角形の面積を除くことを考えましょう。



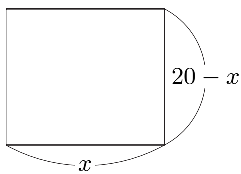
67 正六角形，正三角形のどちらか一方の 1 辺の長さを x とすれば，他方の 1 辺の長さも x で表すことができますね。正六角形の面積は，正三角形を 6 つ合わせたものとして考えることができます。



68 長方形の頂点を座標の 1 つとして $(t,\ 16-4t^2)$ $(0<t<2)$ ととれば，周の長さは t の関数で表せます。



69 周囲の長さが固定された長方形なので，最大辺が見つかれば，このとき，長方形の隣りの辺が最小辺となります。



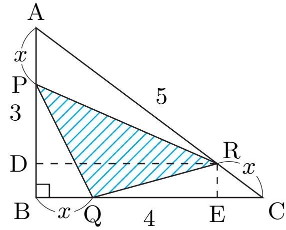
70 1 日の売上個数は，単価が

250 円のとき，200 個
249 円のとき，$(200+4)$ 個
248 円のとき，$(200+4\times 2)$ 個
247 円のとき，$(200+4\times 3)$ 個
⋮

です。単価が a 円のときの 1 日の売上個数を考えてみましょう。

解答・解説

66 △ABC は右図のような直角三角形であり，R から AB，BC に垂線を引き，その交点をそれぞれ D，E とすると，△ABC ∽ △REC，CR $= x$ より



$$\mathrm{CE} = \frac{4}{5}x,\ \mathrm{RE} = \frac{3}{5}x$$

$$\therefore\quad \mathrm{DR} = \mathrm{BE} = 4 - \frac{4}{5}x$$

したがって

$$\triangle\mathrm{APR} = \frac{1}{2} \times x \times \left(4 - \frac{4}{5}x\right),$$

$$\triangle\mathrm{BPQ} = \frac{1}{2} \times x \times (3 - x),\quad \triangle\mathrm{CQR} = \frac{1}{2} \times (4 - x) \times \frac{3}{5}x$$

よって，△PQR の面積 S は

$$S = \triangle\mathrm{ABC} - \triangle\mathrm{APR} - \triangle\mathrm{BPQ} - \triangle\mathrm{CQR}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 - \left(2x - \frac{2}{5}x^2\right) - \frac{1}{2}(3x - x^2) - \frac{1}{10}(12x - 3x^2)$$

$$= \frac{6}{5}x^2 - \frac{47}{10}x + 6 = \frac{6}{5}\left(x - \frac{47}{24}\right)^2 - \left(\frac{47}{24}\right)^2 \times \frac{6}{5} + 6$$

$0 \leqq x \leqq 3$ より，S が最小となる x は $\underline{\boldsymbol{\frac{47}{24}}}$

67 正六角形の 1 辺の長さを x cm とおくと，正三角形の 1 辺の長さは

$$\frac{30 - 6x}{3} = 10 - 2x\ (\mathrm{cm})$$

1 辺の長さが a の正三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

したがって，2 つの図形の面積の和は

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(10 - 2x)^2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}(x^2 - 4x + 10)$$

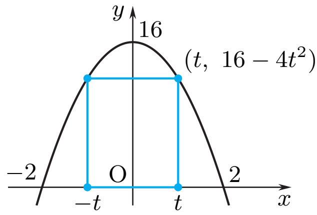
$$= \frac{5\sqrt{3}}{2}\{(x - 2)^2 + 6\}\quad（ただし，0 < x < 5）$$

したがって，正六角形の 1 辺の長さを 2cm としたとき，S は最小となる。すなわち針金を **<u>12cm と 18cm の 2 つに切って</u>**，12cm の方で正六角形，18cm の方で正三角形をつくればよい。

このとき，S の最小値は

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \times 6 = \underline{\boldsymbol{15\sqrt{3}}}\quad (\mathrm{cm}^2)$$

68 $0 < t < 2$ として，右図のように 4 点をとると，長方形の隣り合う 2 辺の長さは $2t$，$16-4t^2$ となるので，周の長さ $l(t)$ は



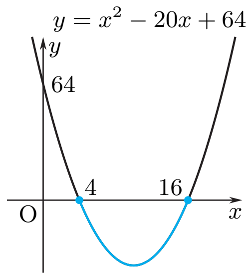
$$\begin{aligned} l(t) &= 2\{2t+(16-4t^2)\} \\ &= -8t^2+4t+32 \\ &= -8\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{65}{2} \end{aligned}$$

したがって $t=\dfrac{1}{4}$ のとき，最大値 $\underline{\boldsymbol{\dfrac{65}{2}}}$ であり，

このとき，面積は

$$\left(2\times\frac{1}{4}\right)\times\left\{16-4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}=\frac{1}{2}\times\frac{63}{4}=\underline{\boldsymbol{\frac{63}{8}}}$$

69 長方形の 1 辺の長さを x cm $(0 < x < 20)$ とおくと，他方は $(20-x)$ cm である。



このとき，面積が $64\ \text{cm}^2$ 以上となるためには

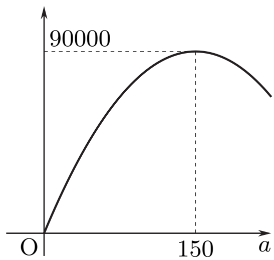
$$x(20-x) \geqq 64$$
$$x^2-20x+64 \leqq 0$$
$$(x-4)(x-16) \leqq 0$$
$$\therefore\quad 4 \leqq x \leqq 16$$

よって，長方形の 1 辺の長さの

最大値は $\underline{\boldsymbol{16}}$ cm，最小値は $\underline{\boldsymbol{4}}$ cm

70 (1) 単価 a 円のとき，1 日の売上個数は

$200+4\times(250-a)=-4a+1200$（個）



なので，売上高は

$$\begin{aligned} a(-4a+1200) &= -4a^2+1200a \quad \cdots\cdots ① \\ &= -4(a-150)^2+90000 \end{aligned}$$

したがって，売上高は単価 $\underline{\boldsymbol{a=150}}$ 円のとき最大となり，最大値 $\underline{\boldsymbol{M=90000}}$（円）

(2) ①より

$$-4a^2+1200a \geqq 80000$$
$$a^2-300a+20000 \leqq 0$$
$$(a-100)(a-200) \leqq 0$$
$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{100 \leqq a \leqq 200}}$$