1 方程式・不等式の解法

1.1 1 次方程式

問題

71 (1) a を定数とする。未知数 x についての方程式 $ax + 2 = x + a^2$ の解を求めよ。 (中央大)

(2) 方程式 $|x - 1| = 3$ を解くと，$x \geqq 1$ のときの解は $x = \boxed{}$ であり，$x < 1$ のときの解は $x = \boxed{}$ である。 (北海道工業大)

(3) 方程式 $|x + 1| + |2x - 3| = 6$ を解け。 (金沢工業大)

(4) $||x - 1| - 2| = 3$ の解は $x = \boxed{}$，$\boxed{}$ である。 (金沢工業大)

チェック・チェック

71 (1) 一般に，方程式 $ax = b$ の解は次の場合に分けられます。

(i) **$a \fallingdotseq 0$ のとき**

$$x = \frac{b}{a} \quad \text{（一意解）}$$

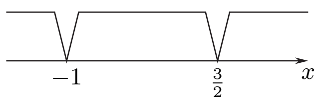
(ii) **$a = 0$ のとき**，$0 \cdot x = b$ であり

$$\begin{cases} b = 0 \text{ のとき} & x \text{ は任意（不定解）} \\ b \fallingdotseq 0 \text{ のとき} & x \text{ は存在しない（不能）} \end{cases}$$

(2) まずは絶対値をはずしなさいという親切な誘導です。

(3) $x + 1$，$2x - 3$ の符号は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$



となりますね。$x \leqq -1$，$-1 < x < \dfrac{3}{2}$，$x \geqq \dfrac{3}{2}$ の 3 通りに場合分けします。

(4) 場合分けして絶対値をはずしてもよいのですが

$$|x - 1| - 2 = \pm 3$$

から出発して，場合分けを減らすとよいでしょう。

解答・解説

71 (1) $ax+2=x+a^2$ より　$(a-1)x=a^2-2$　……①

(i) $a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき，① は

$0 \cdot x = -1$

となり，① をみたす x は存在しない。

(ii) $a-1 \fallingdotseq 0$ すなわち $a \fallingdotseq 1$ のとき，① の両辺を $a-1$ でわって

$x = \dfrac{a^2-2}{a-1}$

以上，(i)，(ii) より，求める解は

$a=1$ のとき　解なし，　$a \fallingdotseq 1$ のとき　$x = \dfrac{a^2-2}{a-1}$

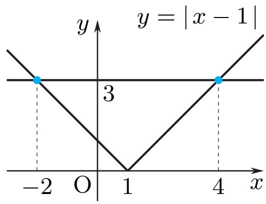
(2) (i) $x \geqq 1$ のとき，$|x-1| = x-1$ だから

$x-1=3$　　$\therefore$　$x=4$

(ii) $x<1$ のとき，$|x-1| = -(x-1)$ だから

$-(x-1)=3$　　$\therefore$　$x=-2$

以上より，求める解は　**$x=-2,\ 4$**



(3) (i) $x \leqq -1$ のとき，与えられた方程式は

$-(x+1)-(2x-3)=6$　　$\therefore$　$x = -\dfrac{4}{3}$

(ii) $-1 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき，与えられた方程式は

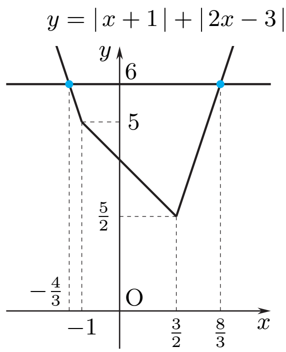
$(x+1)-(2x-3)=6$　　$\therefore$　$x=-2$

$-1 < x < \dfrac{3}{2}$ に不適。

(iii) $x \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき，与えられた方程式は

$(x+1)+(2x-3)=6$　　$\therefore$　$x = \dfrac{8}{3}$

以上より　　**$x = -\dfrac{4}{3},\ \dfrac{8}{3}$**



(4) $||x-1|-2| = 3$ より　　$|x-1|-2 = \pm 3$

(左辺) $\geqq -2$ より　　$|x-1|-2=3$

(i) $x \geqq 1$ のとき　　$(x-1)-2=3$　　$\therefore$　$x=6$　($x \geqq 1$ をみたす)

(ii) $x<1$ のとき　　$-(x-1)-2=3$　　$\therefore$　$x=-4$　($x<1$ をみたす)

以上より，求める解は **$x=-4,\ 6$** である。

1.2　1 次の連立方程式

問題

72 次の 3 つの連立 1 次方程式 (1)，(2)，(3) をそれぞれ解け。

(1) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-4y=0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=0 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$

（電気通信大）

73 a を実数の定数として，次の x，y についての連立方程式を考える。

$$\begin{cases} (a-2)x+4ay=-1 \\ x-(3a+1)y=a \end{cases}$$

$a=\boxed{}$ のとき，この連立方程式の解は存在しない。

$a=\boxed{}$ のとき，この連立方程式の解は無数に存在する。（麗澤大）

74 連立方程式

$$\begin{cases} (x+y-1)(x+2y+3)=0 \\ |x-y|=1 \end{cases}$$

を考える。この解 $(x,\ y)$ のうちで，最小の x は $\boxed{}$ である。

（慶應義塾大）

チェック・チェック

72，**73** 一般に，連立 1 次方程式 $\begin{cases} ax+by=p & \cdots\cdots① \\ cx+dy=q & \cdots\cdots② \end{cases}$ の解は，

加減法を用いると

①$\times d-$②$\times b$ より　$(ad-bc)x=pd-qb$　$\cdots\cdots$③

①$\times c-$②$\times a$ より　$-(ad-bc)y=pc-qa$　$\cdots\cdots$④

(i) **$ad-bc\neq 0$ のとき**，③，④ は解けて，①，② は一意解をもつ。

(ii) $ad-bc=0$ のとき，$a:b=c:d$ であり

$\begin{cases} \boldsymbol{a:b:p=c:d:q} \text{ のとき，①，②は一致し，解は無数に存在する（不定解）} \\ \boldsymbol{a:b:p\neq c:d:q} \text{ のとき，①，②をみたす 解は存在しない（不能）} \end{cases}$

74 連立方程式を代入法を用いて解きます。

$|x-y|=1$ より　$x-y=\pm 1$　$\therefore$　$y=x\mp 1$

第 1 式にこれを代入し，解 x を求めましょう。

解答・解説

72 (1) $\begin{cases} x+2y=4 & \cdots\cdots ① \\ 2x-4y=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ において，① × 2 − ② より

$8y=8$ 　∴ $\underline{\boldsymbol{y=1}}$ 　∴ $\underline{\boldsymbol{x=2}}$ （∵ ①）

(2) $\begin{cases} x+2y=4 & \cdots\cdots ③ \\ 2x+4y=0 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$ において，③ × 2 より

$2x+4y=8$

となり，これは ④ と矛盾する。よって，**解なし**。

(3) $\begin{cases} x+2y=4 & \cdots\cdots ⑤ \\ 2x+4y=8 & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$ において，⑤ × 2 より

$2x+4y=8$

となり，これは ⑥ と一致する。よって，$\underline{\boldsymbol{x=4-2t,\ y=t}}$ **（$\boldsymbol{t}$ は任意の数）**

73 $\begin{cases} (a-2)x+4ay=-1 & \cdots\cdots ① \\ x-(3a+1)y=a & \cdots\cdots ② \end{cases}$ が一意解をもたない条件は

$(a-2):4a=1:-(3a+1)$

$4a=-(3a+1)(a-2)$ 　$3a^2-a-2=0$ 　∴ $a=-\dfrac{2}{3},\ 1$

(i) $a=-\dfrac{2}{3}$ のとき

①は $x+y=\dfrac{3}{8}$，　②は $x+y=-\dfrac{2}{3}$

となり，解は存在しない。

(ii) $a=1$ のとき

①は $-x+4y=-1$，　②は $x-4y=1$

となり，両方程式は一致するので解は無数に存在する。

よって，$\underline{\boldsymbol{a=-\dfrac{2}{3}}}$ のとき解は存在しない。$\underline{\boldsymbol{a=1}}$ のとき解は無数に存在する。

74 $|x-y|=1$ より 　$x-y=\pm1$ 　∴ $y=x\mp1$

(i) $y=x-1$ のとき，第 1 式は

$\{x+(x-1)-1\}\{x+2(x-1)+3\}=0$ 　∴ $x=1,\ -\dfrac{1}{3}$

(ii) $y=x+1$ のとき，第 1 式は

$\{x+(x+1)-1\}\{x+2(x+1)+3\}=0$ 　∴ $x=0,\ -\dfrac{5}{3}$

以上より，最小の x は 　$\underline{\boldsymbol{x=-\dfrac{5}{3}}}$

1.3　2 次方程式

問題

75 (1) 2 次方程式 $x^2 - 4x - 5 = 0$ の解は $x = \boxed{}$, $\boxed{}$ である。（日本歯科大）

(2) 2 次方程式 $x^2 - \sqrt{2}x - 4 = 0$ の解は $x = \boxed{}$, $\boxed{}$ である。（日本歯科大）

(3) 2 次方程式 $2x^2 + 3x = 1 + 2x$ の解は $x = \boxed{}$, $\boxed{}$ である。（東京工芸大）

(4) 方程式 $x^2 - 4x + 2 = 0$ の解は $x = \boxed{}$, $\boxed{}$ である。（中央大）

76 (1) 方程式 $x^2 - 4|x| - 5 = 0$ を解くと $\boxed{}$。（工学院大）

(2) 方程式 $x^2 - x - 8 = |x|$ を解け。（広島工業大）

(3) $|x^2 - x - 6| = 4x^2$ の実数解は $x = \boxed{}$, $\boxed{}$ である。（慶應義塾大　改）

チェック・チェック

75 まずは左辺の因数分解を考えます。

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$
$$acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$$

因数分解できないときは解の公式を用います。

$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ の解は　$\boldsymbol{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

$ax^2 + 2b'x + c = 0\ (a \neq 0)$ の解は　$x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

76 (1) $x \geqq 0$, $x < 0$ と場合分けをしてもよいのですが，$x^2 = |x|^2$ より

$$|x|^2 - 4|x| - 5 = 0$$

とみることで，$|x|$ について解くことができます。

(2) $x \geqq 0$, $x < 0$ と場合分けして絶対値をはずしましょう。

(3) $x^2 - x - 6 \geqq 0$, $x^2 - x - 6 < 0$ と場合分けしてもよいのですが

$$|A| = B \text{ かつ } B > 0 \text{ ならば}\qquad A = \pm B$$

を利用して，2 つの方程式を解く解法もあります。

解答・解説

75 (1) $x^2-4x-5=0$ の左辺を因数分解して

$(x+1)(x-5)=0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=-1,\ 5}}$

(2) $x^2-\sqrt{2}x-4=0$ の左辺を因数分解して

$(x+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}}}$

(3) $2x^2+3x=1+2x$ を変形して

$2x^2+x-1=0$　　$(x+1)(2x-1)=0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=-1,\ \frac{1}{2}}}$

(4) 解の公式より　　$x=2\pm\sqrt{(-2)^2-2}=\underline{\boldsymbol{2\pm\sqrt{2}}}$

76 (1) $x^2=|x|^2$ であるから

$|x|^2-4|x|-5=0$　　$\therefore$　$(|x|+1)(|x|-5)=0$

$|x|\geqq 0$ であるから，求める解は

$|x|=5$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=\pm 5}}$

(2) (i) $x\geqq 0$ のとき

$x^2-x-8=x$　　$\therefore$　$(x+2)(x-4)=0$

$x\geqq 0$ より　　$x=4$

(ii) $x<0$ のとき

$x^2-x-8=-x$　　$\therefore$　$x^2=8$

$x<0$ より　　$x=-2\sqrt{2}$

以上より，求める解は　　$\underline{\boldsymbol{x=-2\sqrt{2},\ 4}}$

(3) $|x^2-x-6|=4x^2$ より

$x^2-x-6=\pm 4x^2$

$\therefore$　$3x^2+x+6=0$　または　$5x^2-x-6=0$

$3x^2+x+6=0$ について，この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=1-4\cdot 3\cdot 6<0$

より，実数解をもたない。

$5x^2-x-6=0$ について

$5x^2-x-6=0$

$(x+1)(5x-6)=0$

$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x=-1,\ \frac{6}{5}}}$

$$\begin{array}{cccccr} 5 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -6 & \longrightarrow & -6 \\ 1 & & 1 & \longrightarrow & 5 \\ \hline & & & & -1 \end{array}$$

1.4 共通解

問題

77 2 つの 2 次方程式

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots\cdots ①,\quad x^2+bx+a=0 \quad \cdots\cdots ②$$

がただ 1 つの共通の解 α をもつとき，$\alpha=$ $\boxed{}$ である。また，このとき，共通でない解の和は $\boxed{}$ である。（明星大）

78 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ は $x=-1$，α を解としてもち，2 次方程式 $x^2+ax+3b=0$ とちょうど 1 つの解 $x=\alpha$ を共有している。このとき，実定数 a，b の値を求めよ。（長崎総合科学大）

チェック・チェック

77 2 つの方程式 $f(x)=0$，$g(x)=0$ が共通解 α をもつときは

$$f(\alpha)=0 \text{ かつ } g(\alpha)=0$$

が成り立つので，この連立方程式を解けばよいですね。

本問は定数 a，b を含むので，α，a，b についての連立方程式を解くことになります。

78 $x=-1$ が $x^2-ax+b=0$ の解であることより，a と b の関係が 1 つ定まります。b を a で表すとき，他の解 α も a で表すことができます。この解 α はもう一方の方程式の解でもあり，これにより a についての条件式が得られます。これより，a の値を求めることができますね。“2 つの方程式はちょうど 1 つの解を共有する”という条件も忘れずに考えましょう。

解答・解説

77　α は ①，② の共通解だから

$$\alpha^2+a\alpha+b=0 \quad \cdots\cdots①', \quad \alpha^2+b\alpha+a=0 \quad \cdots\cdots②'$$

をみたす。このとき ①′ − ②′ より

$$(a-b)\alpha=a-b \qquad \therefore \quad (a-b)(\alpha-1)=0 \quad \cdots\cdots③$$

$a=b$ のとき，① と ② は一致し，共通解がただ 1 つであることに反するから

$$\underline{\boldsymbol{\alpha=1}}$$

このとき，①′(②′) より $b=-(a+1)$ であり

$$①: x^2+ax-(a+1)=0 \qquad \therefore \quad (x-1)(x+a+1)=0$$
$$②: x^2-(a+1)x+a=0 \qquad \therefore \quad (x-1)(x-a)=0$$

よって，共通でない解の和は

$$(-a-1)+a=\underline{\boldsymbol{-1}}$$

78　$x^2-ax+b=0 \quad \cdots\cdots①, \quad x^2+ax+3b=0 \quad \cdots\cdots②$

方程式 ① は $x=-1$ を解にもつから

$$1+a+b=0 \qquad \therefore \quad b=-a-1$$

このとき，① の解は

$$x^2-ax-a-1=0 \qquad \therefore \quad x=-1,\ a+1$$

よって，$\alpha=a+1$ である。

　また，方程式 ② は

$$x^2+ax-3(a+1)=0$$

であり，α は ② の解でもあるから

$$(a+1)^2+a(a+1)-3(a+1)=0 \qquad \therefore \quad a=\pm1$$

(i) $a=1$ のとき，$b=-2$ であり

$$①: x^2-x-2=0 \qquad \therefore \quad (x+1)(x-2)=0$$
$$②: x^2+x-6=0 \qquad \therefore \quad (x+3)(x-2)=0$$

　であり，①，②はちょうど 1 つの解 $x=2$ を共有している。

(ii) $a=-1$ のとき $b=0$ であり

$$①: x^2+x=0 \qquad \therefore \quad x(x+1)=0$$
$$②: x^2-x=0 \qquad \therefore \quad (x-1)x=0$$

　であり，①，②はちょうど 1 つの解 $x=0$ を共有している。

以上より

$$\underline{\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ -2),\ (-1,\ 0)}}$$

1.5　1 次不等式

問題

79　次の不等式を解け。

(1)　$3x-5<x+1<2x+3$　（東京都市大）

(2)　$\begin{cases} x-4 \leqq 5-2x \\ 4x+1>3x-5 \end{cases}$　（東海大）

80　「$(3x+3<x-5$ または $x-2<2x+1)$ かつ $-2x+3>1$」という条件をみたす x の範囲を求めなさい。ただし，該当する x が存在しないときは「存在しない」と答えること。　（名古屋学院大）

81　x の不等式 $2ax-1 \leqq 4x$ の解が $x \geqq -5$ であるのは，定数 a がどのような値のときか。　（関西大）

チェック・チェック

79　(1)　$A<B<C \iff \begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ です。

(2)　連立不等式 $\begin{cases} f(x) \leqq 0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ を解くということは，$f(x) \leqq 0$ かつ $g(x)>0$ をみたす x の値の範囲を求めることです。

80　各不等式の解を数直線上にとり，「または」「かつ」に注意して条件をみたす x の範囲を求めます。

81　一般の 1 次以下の不等式について整理しておきましょう。

$ax \leqq b$ の解は

(i) $a=0$ のとき，$\begin{cases} b \geqq 0 \text{ ならば，実数全体} \\ b<0 \text{ ならば，解なし} \end{cases}$

(ii) $a>0$ のとき，$x \leqq \dfrac{b}{a}$

(iii) $a<0$ のとき，$x \geqq \dfrac{b}{a}$

解答・解説

79 (1) $3x-5<x+1$ より

$2x<6 \qquad \therefore \quad x<3 \quad \cdots\cdots①$

$x+1<2x+3$ より

$-x<2 \qquad \therefore \quad x>-2 \quad \cdots\cdots②$

① かつ ② より　$\underline{\boldsymbol{-2<x<3}}$

(2) $x-4 \leqq 5-2x$ より

$3x \leqq 9 \qquad \therefore \quad x \leqq 3 \quad \cdots\cdots①$

$4x+1>3x-5$ より

$x>-6 \quad \cdots\cdots②$

① かつ ② より　$\underline{\boldsymbol{-6<x \leqq 3}}$

80 $3x+3<x-5$ より　$2x<-8 \qquad \therefore \quad x<-4$

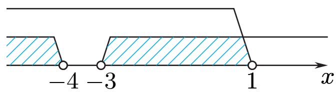
$x-2<2x+1$ より　$x>-3$

$-2x+3>1$ より　$-2x>-2 \qquad \therefore \quad x<1$

なので，与えられた条件は

「$(x<-4$ または $x>-3)$ かつ $x<1$」

$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{x<-4} \textbf{ または } \boldsymbol{-3<x<1}}$



81 $2ax-1 \leqq 4x$ より　$(2a-4)x \leqq 1$

解が $x \geqq -5$ となるためには

$2a-4<0$　すなわち　$a<2$

が必要である。このとき $x \geqq \dfrac{1}{2a-4}$ であり

$$\frac{1}{2a-4}=-5 \qquad 1=-5(2a-4) \qquad \therefore \quad a=\frac{19}{10}$$

これは $a<2$ をみたすから　$\underline{\boldsymbol{a=\dfrac{19}{10}}}$

1.6　絶対値を含む 1 次不等式

問題

82 次の不等式を解け。

(1) $1 < |x-2| < 3$ （日本大）

(2) $|2x| + |x-4| < 6$ （立教大）

83 (1) 関数 $y = |x+3| + |x-1|$ のグラフをかけ。

(2) 不等式 $6 \leqq |x+3| + |x-1| \leqq 10$ をみたす x の範囲を求めよ。

（東京女子大）

84 a は実数の定数とする。

(1) $|x-a| < 2$ をみたす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $|x-a| < 2$ をみたす正の実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(3) $|x-a| < x+1$ をみたす実数 x が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(4) a の値が (3) の範囲にあるとき，$|x-a| < x+1$ をみたす実数 x の値の範囲を求めよ。 （慶應義塾大　改）

チェック・チェック

82 絶対値をはずしながら不等式を解く問題ですが，グラフがかけるときは，グラフも活用しましょう。ミスが減ります。

83 これはグラフの活用が重視された問題です。(2) では (1) のグラフと 2 本の直線 $y=6$，$y=10$ との交点を求めます。

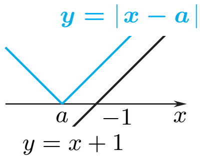
84 (1) 文字 a が入ってきましたが

$$|x| < p \ (p > 0) \iff -p < x < p$$

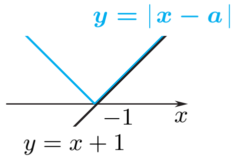
が基本です。

(2) $p < x < q$ をみたす正の実数 x が存在する条件は $q > 0$ です。

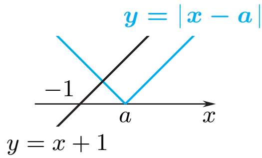
(3), (4) $y = |x - a|$ と $y = x + 1$ のグラフをかいてみましょう。



$a < -1$ のとき



$a = -1$ のとき



$a > -1$ のとき

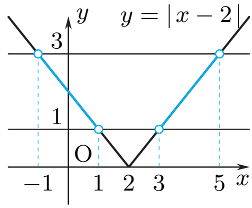
解答・解説

82 (1) 不等式を変形すると

$1 < |x-2| < 3$

$-3 < x-2 < -1$　または　$1 < x-2 < 3$

$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{-1 < x < 1,\quad 3 < x < 5}}$



(2) (i) $x < 0$ のとき

$-2x-(x-4) < 6$　　$\therefore$　$x > -\dfrac{2}{3}$

$x < 0$ と合わせて　$-\dfrac{2}{3} < x < 0$

(ii) $0 \leqq x < 4$ のとき

$2x-(x-4) < 6$　　$\therefore$　$x < 2$

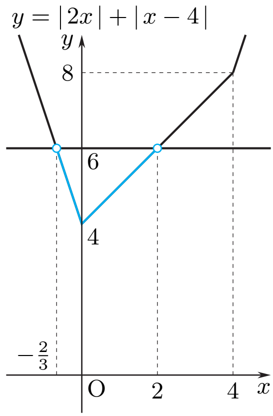
$0 \leqq x < 4$ と合わせて　$0 \leqq x < 2$

(iii) $x \geqq 4$ のとき

$2x+(x-4) < 6$　　$\therefore$　$x < \dfrac{10}{3}$

これは $x \geqq 4$ より不適。

以上より　$\underline{\boldsymbol{-\dfrac{2}{3} < x < 2}}$



83 (1) (i) $x < -3$ のとき

$y = -(x+3)-(x-1) = -2x-2$

(ii) $-3 \leqq x < 1$ のとき

$y = (x+3)-(x-1) = 4$

(iii) $x \geqq 1$ のとき

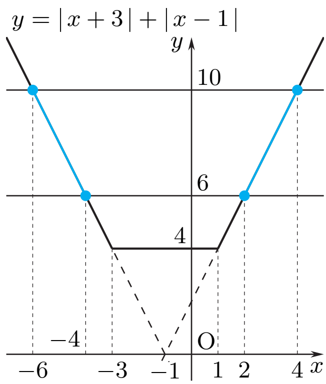
$y = (x+3)+(x-1) = 2x+2$

以上より，$y = |x+3|+|x-1|$ のグラフは

<u>右図の太線部分</u> となる。

(2) (1) のグラフと 2 直線 $y=6$，$y=10$ との交点の x 座標を求めると右図となる。よって

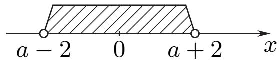
$\underline{\boldsymbol{-6 \leqq x \leqq -4,\quad 2 \leqq x \leqq 4}}$



84 (1) $|x-a|<2$ より　$-2<x-a<2$　$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{a-2<x<a+2}}$

(2) $a+2>0$ であればよく

$\underline{\boldsymbol{a>-2}}$

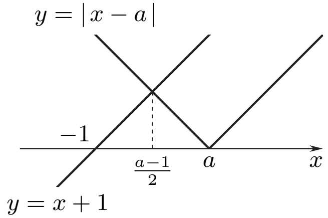


(3) $y=-x+a$ のグラフと $y=x+1$ のグラフの交点の x 座標は

$x=\dfrac{a-1}{2}$

右図より $\dfrac{a-1}{2}<a$ であればよく

$a-1<2a$　$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{a>-1}}$



(4) (3) の図より

$\underline{\boldsymbol{x>\dfrac{a-1}{2}}}$

1.7　2 次不等式

問題

85 (1) 2 次不等式 $x(x-3)-x-5<0$ の解は $\boxed{}$。　(日本工業大)

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ x^2+3x+1>0 \end{cases}$ をみたす x の範囲は $\boxed{}$ である。

(愛知工業大)

(3) $x^2-(a+1)x-a-2>0$ を x について解け。ただし，a を実数とする。　(昭和女子大)

(4) a を定数とするとき，x についての次の不等式を解け。

$$(a-2)x^2+(4-a)x-2 \geqq 0$$

(愛知教育大)

チェック・チェック

85 (1) 因数分解します。

(2) 2 つの不等式の解の共通部分が求める連立不等式の解です。

(3) (左辺) $=0$ の 2 解 $x=a+2$，-1 の大小比較が必要です。

(4) 2 次不等式とは限りません。$a=2$ のときは 2 次の係数が 0 となり，1 次不等式を解くことになります。

解答・解説

85 (1) $x(x-3)-x-5<0$ より

$x^2-4x-5<0 \quad (x-5)(x+1)<0 \quad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{-1<x<5}}$

(2) $x^2-2x-3<0$ を解くと

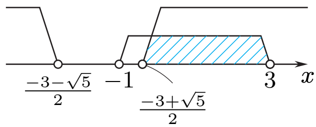
$(x+1)(x-3)<0 \quad \therefore \quad -1<x<3 \quad \cdots\cdots ①$

$x^2+3x+1>0$ を解くと

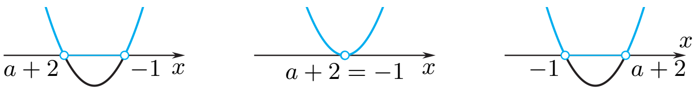
$x<\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ または $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}<x \quad \cdots\cdots ②$

① かつ ② より

$\underline{\boldsymbol{\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}<x<3}}$



(3) $x^2-(a+1)x-a-2>0$ より $\{x-(a+2)\}(x+1)>0$



(i) $a+2<-1$ すなわち $\underline{\boldsymbol{a<-3}\text{ のとき}}$ $\underline{\boldsymbol{x<a+2,\ x>-1}}$

(ii) $a+2=-1$ すなわち $\underline{\boldsymbol{a=-3}\text{ のとき}}$ $\underline{\boldsymbol{x\neq -1}}$

(iii) $a+2>-1$ すなわち $\underline{\boldsymbol{a>-3}\text{ のとき}}$ $\underline{\boldsymbol{x<-1,\ x>a+2}}$

(4) $(a-2)x^2+(4-a)x-2\geqq 0$ より $\{(a-2)x+2\}(x-1)\geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$

(i) $\underline{\boldsymbol{a=2}\text{ のとき}}$ $2(x-1)\geqq 0 \quad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{x\geqq 1}}$

(ii) $\underline{\boldsymbol{a>2}\text{ のとき}}$ $① : \left(x+\dfrac{2}{a-2}\right)(x-1)\geqq 0$

$-\dfrac{2}{a-2}<0<1$ に注意して $\underline{\boldsymbol{x\leqq -\dfrac{2}{a-2},\quad x\geqq 1}}$

(iii) $a<2$ のとき $① : \left(x+\dfrac{2}{a-2}\right)(x-1)\leqq 0$

ここで，$-\dfrac{2}{a-2}$ と 1 の大小を比較すると，$-\dfrac{2}{a-2}>1$ のとき $a>0$ なので

$\underline{\boldsymbol{0<a<2}\text{ のとき，}\boldsymbol{1\leqq x\leqq -\dfrac{2}{a-2}}}$

$\underline{\boldsymbol{a=0}\text{ のとき，}\boldsymbol{x=1}}$

$\underline{\boldsymbol{a<0}\text{ のとき，}\boldsymbol{-\dfrac{2}{a-2}\leqq x\leqq 1}}$

1.8　絶対値のついた 2 次不等式

問題

86 (1) 不等式 $x^2-2x-5<|x-1|$ をみたす実数 x の範囲は $\boxed{\quad\quad}$ である。（日本獣医畜産大）

(2) 2 次不等式 $x^2-3|x-1|-7 \leqq 0$ を解きなさい。（日本大）

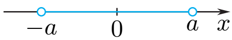
(3) $|x^2-3x+1|<1$ をみたす x の範囲は $\boxed{\quad\quad}$ である。（大阪工業大）

(4) 不等式 $|x^2-2x-15| \leqq x+3$ を解け。（青山学院大）

チェック・チェック

86 (1)，(2) 絶対値をはずしてから不等式の処理をします。

(3) $|x|<a\ (a>0) \iff -a<x<a$



(4) $x^2-2x-15 \geqq 0$，$x^2-2x-15<0$ と場合分けすることもできますが，絶対値の定義より $x+3 \geqq 0$ であるから

$$-(x+3) \leqq x^2-2x-15 \leqq x+3$$

として絶対値をはずすこともできます。

解答・解説

86 (1) (i) $x-1 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 1$ のとき

$x^2-2x-5<x-1$　　$x^2-3x-4<0$　　$\therefore$　$(x+1)(x-4)<0$

$x \geqq 1$ と合わせて　　$1 \leqq x < 4$

(ii) $x-1<0$ すなわち $x<1$ のとき

$x^2-2x-5<-(x-1)$　　$x^2-x-6<0$　　$\therefore$　$(x+2)(x-3)<0$

$x<1$ と合わせて　　$-2<x<1$

(i) または (ii) より

$\underline{\boldsymbol{-2<x<4}}$

(2) (i) $x-1 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 1$ のとき

$x^2-3(x-1)-7 \leqq 0$　　$x^2-3x-4 \leqq 0$　　$\therefore$　$(x+1)(x-4) \leqq 0$

$x \geqq 1$ と合わせて　　$1 \leqq x \leqq 4$

(ii) $x-1<0$ すなわち $x<1$ のとき

$x^2+3(x-1)-7 \leqq 0$　　$x^2+3x-10 \leqq 0$　　$\therefore$　$(x+5)(x-2) \leqq 0$

$x<1$ と合わせて　　$-5 \leqq x < 1$

(i) または (ii) より

$\underline{\boldsymbol{-5 \leqq x \leqq 4}}$

(3) $|x^2-3x+1|<1$ より

$-1<x^2-3x+1<1$

$-1<x^2-3x+1$ すなわち $x^2-3x+2>0$ より

$(x-2)(x-1)>0$　　$\therefore$　$x<1$ または $x>2$　　……①

$x^2-3x+1<1$ すなわち $x^2-3x<0$ より

$x(x-3)<0$　　$\therefore$　$0<x<3$　　……②

よって，① かつ ② をみたす x の範囲は

$\underline{\boldsymbol{0<x<1,\ 2<x<3}}$

(4) $|x^2-2x-15| \leqq x+3$ について，$x+3 \geqq 0$ すなわち $x \geqq -3$ のもとで

$-(x+3) \leqq x^2-2x-15 \leqq x+3$

$-(x+3) \leqq x^2-2x-15$ すなわち $x^2-x-12 \geqq 0$ より

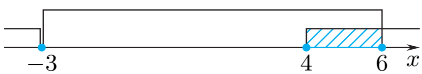
$(x-4)(x+3) \geqq 0$　　$\therefore$　$x \leqq -3$ または $x \geqq 4$　　……①

$x^2-2x-15 \leqq x+3$ すなわち $x^2-3x-18 \leqq 0$ より

$(x+3)(x-6) \leqq 0$　　$\therefore$　$-3 \leqq x \leqq 6$　　……②

よって，$x \geqq -3$ かつ ① かつ ② をみたす x の範囲は

$\underline{\boldsymbol{x=-3,\ 4 \leqq x \leqq 6}}$



1.9　2 次不等式をつくる

問題

87 (1) 不等式 $x^2-3x+k \leqq 0$ の解が $-2 \leqq x \leqq 5$ であるとき，k の値は $\boxed{}$ である。　（日本工業大）

(2) 2 次不等式 $ax^2-x+b>0$ の解が $-2<x<1$ となるのは，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ のときである。　（中部大）

(3) 不等式 $x^2+2x<\boxed{}$ の解は $-4<x<\boxed{}$ である。　（徳島文理大）

チェック・チェック

87 $\alpha<\beta$ のとき

$$\alpha<x<\beta \iff (x-\alpha)(x-\beta)<0$$

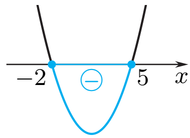
あるいは

$$\alpha<x<\beta \iff -(x-\alpha)(x-\beta)>0$$

です。どちらの不等式を用いるかは，問題文の不等号の向きに合わせて選ぶとよいでしょう。

解答・解説

87 (1) 2 次不等式の解が $-2 \leqq x \leqq 5$ であることから

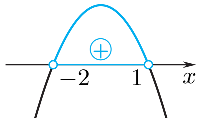


$(x+2)(x-5) \leqq 0$ すなわち $x^2-3x-10 \leqq 0$

よって，求める k の値は

$\underline{\boldsymbol{k=-10}}$

(2) 2 次不等式の解が $-2<x<1$ であることから



$-(x+2)(x-1)>0$ すなわち $-x^2-x+2>0$

よって，求める a，b の値は

$\underline{\boldsymbol{a=-1,\ b=2}}$

(3) 2 次不等式

$x^2+2x<a$ すなわち $x^2+2x-a<0$

の解が $-4<x<b$ なので，$x=-4$ は $x^2+2x-a=0$ の解である。

$16-8-a=0$ 　 $\therefore$ 　 $a=8$

したがって，不等式 $\underline{\boldsymbol{x^2+2x<8}}$ の解は

$x^2+2x-8<0$ 　 $(x+4)(x-2)<0$ 　 $\therefore$ 　 $\underline{\boldsymbol{-4<x<2}}$

1.10　ある範囲でつねに成り立つ 2 次不等式

問題

88　$0 \leqq x \leqq 2$ をみたすすべての実数 x に対して

$$x^2 - 2ax + a - 3 \leqq 0$$

が成り立つような定数 a の範囲は $\boxed{\quad}$ である。　（千葉工業大）

89　不等式 $x^2 - 2x - 8 < 0$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。したがって，$-1 < x < 2$ であるすべての x に対して

$$(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x + k) > 0$$

が成り立つような定数 k の値の範囲を定めると $\boxed{\quad}$ である。　（福岡大）

90　k を定数とし，$f(x) = x^2 - kx + k + 3$ とする。
不等式 $f(x) > 0$ の解がすべての実数であるとき，k の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

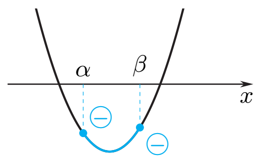
また，不等式 $f(x) < 0$ をみたす整数 x が 3 だけであるとき，k の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。　（京都産業大）

チェック・チェック

88　2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが下に凸のとき,「$\alpha \leqq x \leqq \beta$ をみたすすべての実数 x に対して
$f(x) \leqq 0$ が成り立つ」ための条件は

$$f(\alpha) \leqq 0 \text{ かつ } f(\beta) \leqq 0$$

であることです。



89　$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) < 0$ のとき，同じ $a \leqq x \leqq b$ の範囲で

$$f(x)g(x) > 0$$

となる条件は

$$a \leqq x \leqq b \text{ において } g(x) < 0$$

であることです。

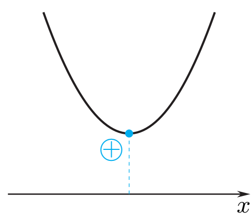
90　2 次不等式 $f(x) > 0$ がすべての実数で成立する条件は

$$(f(x) \text{ の最小値}) > 0$$

であることです。これは $y = f(x)$ のグラフが下に凸であり

$$(\text{頂点の } y \text{ 座標}) > 0 \quad (\text{または，判別式} < 0)$$

ということです。



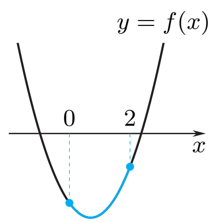
解答・解説

88 $f(x)=x^2-2ax+a-3$ とすると，$y=f(x)$ のグラフは下に凸より，$0 \leqq x \leqq 2$ をみたすすべての実数 x に対して $f(x) \leqq 0$ となる条件は

$f(0) \leqq 0$ かつ $f(2) \leqq 0$

である。したがって

$$\begin{cases} a-3 \leqq 0 \\ 4-4a+a-3 \leqq 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{\frac{1}{3} \leqq a \leqq 3}}$$



89 2 次不等式 $x^2-2x-8<0$ を解くと

$(x-4)(x+2)<0 \qquad \therefore \quad \underline{\boldsymbol{-2<x<4}}$

したがって，$-1<x<2$ のとき $x^2-2x-8<0$ であるから，$-1<x<2$ においてつねに $(x^2-2x-8)(x^2-2x+k)>0$ が成り立つ条件は，$-1<x<2$ においてつねに

$x^2-2x+k<0$

が成り立つことである。

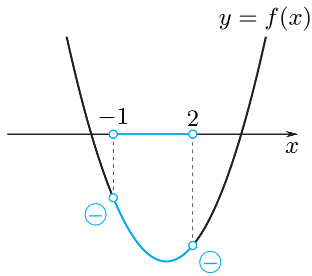
$f(x)=x^2-2x+k$ とすると，$y=f(x)$ は下に凸なので

$f(-1) \leqq 0$ かつ $f(2) \leqq 0$

が求める条件である。したがって

$$\begin{cases} f(-1)=3+k \leqq 0 \\ f(2)=k \leqq 0 \end{cases}$$

$\therefore \quad \underline{\boldsymbol{k \leqq -3}}$



90 $f(x)=x^2-kx+k+3$

$$=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+k+3$$

すべての実数 x に対して $f(x)>0$ となるのは

（$f(x)$ の最小値）>0

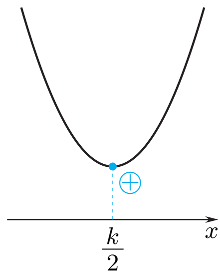
のときであるから

$$f\left(\frac{k}{2}\right)=-\frac{k^2}{4}+k+3>0$$

$$k^2-4k-12<0$$

$$(k-6)(k+2)<0$$

$\therefore$ $\underline{\boldsymbol{-2<k<6}}$



また，$f(x)<0$ をみたす整数 x が 3 だけとなる条件は

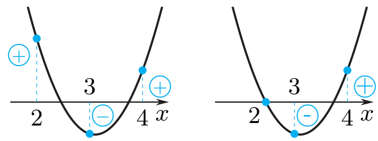
$f(2)\geqq 0$ かつ $f(3)<0$ かつ $f(4)\geqq 0$

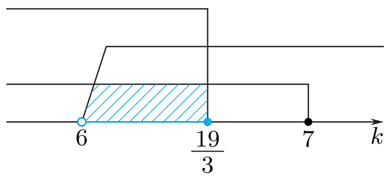
であるから

$$\begin{cases} f(2)=7-k\geqq 0 \\ f(3)=12-2k<0 \\ f(4)=19-3k\geqq 0 \end{cases}$$

したがって

$$\underline{\boldsymbol{6<k\leqq\frac{19}{3}}}$$





1.11　すべての〜，適当な〜が存在する

問題

91 不等式

$$-x^2+(a+2)x+a-3<y<x^2-(a-1)x-2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

を考える。ただし，x，y，a は実数とする。

このとき

「どんな x に対しても，それぞれ適当な y をとれば不等式 $(*)$ が成立する」

ための a の値の範囲は $\boxed{} < a < \boxed{}$ である。

また

「適当な y をとれば，どんな x に対しても不等式 $(*)$ が成立する」

ための a の値の範囲は $\boxed{} < a < \boxed{}$ である。　（早稲田大）

92 a を実数の定数とする。区間 $1 \leqq x \leqq 4$ を定義域とする 2 つの関数

$$f(x)=ax, \quad g(x)=x^2-4x+9$$

を考える。以下の条件を満たすような a の範囲をそれぞれ求めよ。

(1) 定義域に属するすべての x に対して，$f(x) \geqq g(x)$ が成り立つ。
　このような a の範囲は $a \geqq \boxed{}$ である。

(2) 定義域に属する x で，$f(x) \geqq g(x)$ を満たすものがある。
　このような a の範囲は $a \geqq \boxed{}$ である。

(3) 定義域に属するすべての x_1 とすべての x_2 に対して，$f(x_1) \geqq g(x_2)$ が成り立つ。このような a の範囲は $a \geqq \boxed{}$ である。

(4) 定義域に属する x_1 と x_2 で，$f(x_1) \geqq g(x_2)$ を満たすものがある。
　このような a の範囲は $a \geqq \boxed{}$ である。　（慶應義塾大）

チェック・チェック

91 不等式 $f(x) < y < g(x)$ $\quad\cdots\cdots(*)\quad$ に対して

「**どんな x** に対しても，それぞれ**適当な y** をとれば不等式 $(*)$ が成立する」

ということは，x に対して，不等式 $(*)$ をみたす y を見つけることできる（y が存在する）ということです。x ごとに y の値を決めることができて，x を与えると $f(x)$，$g(x)$ が確定するので，$(*)$ をみたす y が存在する条件は $f(x) < g(x)$ をみたすこと，すなわち，**「どんな x に対しても $f(x) < g(x)$ をみたす」**ことが与えられた条件です。

　また

「**適当な y** をとれば，**どんな x** に対しても不等式 $(*)$ が成立する」

ということは，うまい具合に y を決めると，どんな x に対しても不等式 $(*)$ が成り立つということです。y は一定であり変化することはありません。どんな x に対しても

「$f(x) < y$（一定）かつ y（一定）$< g(x)$」

をみたす y が存在する条件，すなわち

「（$f(x)$ の最大値）$<$（$g(x)$ の最小値）」

であることが与えられた条件です。

92 (1)「すべての x に対して $f(x) \geqq g(x)$ である」ことは「すべての x に対して $f(x)-g(x) \geqq 0$ である」と言い換えることができますが，$y=g(x)$ のグラフは固定されていて，$y=f(x)$ のグラフは原点を通り，傾きが a の直線なので，2 つのグラフから a の範囲を求めることができます。

(2)「$f(x) \geqq g(x)$ をみたす x が存在する」ということは

（$f(x)-g(x)$ の最大値）$\geqq 0$ $\quad(1 \leqq x \leqq 4)$

あるいは

（$g(x)-f(x)$ の最小値）$\leqq 0$ $\quad(1 \leqq x \leqq 4)$

と言い換えることができますが，ここでもグラフを利用しましょう。

(3)「すべての x_1 とすべての x_2 に対して，$f(x_1) \geqq g(x_2)$ である」ということは，x_1 と x_2 はそれぞれ無関係に動くので，まず x_1 を固定し，x_2 を動かしてみましょう。

　x_1 を固定したとき，$f(x_1)$ は確定し，どんな x_2 に対しても $f(x_1)$（一定）$\geqq g(x_2)$ が成り立つから「$f(x_1)$（一定）$\geqq$（$g(x_2)$ の最大値）」です。

　次に，x_1 をいろいろ動かすと

（$f(x_1)$ の最小値）$\geqq$（$g(x_2)$ の最大値）

が求める条件であることがわかります。

(4) (3) と同じように考えます。

「$f(x_1) \geqq g(x_2)$ をみたす x_1 と x_2 が存在する」ということは

（$f(x_1)$ の最大値）$\geqq$（$g(x_2)$ の最小値）

が求める条件です。

解答・解説

91　$f(x) = -x^2 + (a+2)x + a - 3$，$g(x) = x^2 - (a-1)x - 2$ とおく。

「どんな x に対しても，それぞれ適当な y をとれば不等式 $f(x) < y < g(x)$ が成立する」ための条件は，どんな x に対しても

$$f(x) < g(x)$$

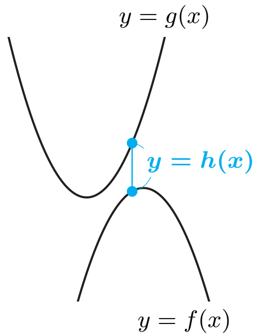
が成立することである。すなわち

$$h(x) = g(x) - f(x) = 2x^2 - (2a+1)x - a + 1$$

とおくと

$$(h(x) \text{ の最小値}) > 0$$

が成り立つことである。



$$h(x) = 2\left(x - \frac{2a+1}{4}\right)^2 - \frac{4a^2 + 12a - 7}{8} \text{ より}$$

$$-\frac{4a^2+12a-7}{8} > 0$$

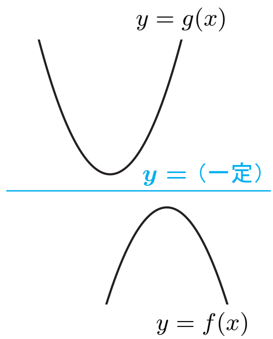
$$4a^2 + 12a - 7 < 0$$

$$(2a+7)(2a-1) < 0 \qquad \therefore \ \underline{\boldsymbol{-\frac{7}{2} < a < \frac{1}{2}}}$$

次に，「適当な y をとれば，どんな x に対しても不等式 $f(x) < y < g(x)$ が成立する」ための条件は

$$(f(x) \text{ の最大値}) < (g(x) \text{ の最小値})$$

が成立することである。



$$f(x) = -\left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + 8a - 8}{4}$$

$$g(x) = \left(x - \frac{a-1}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 2a + 9}{4}$$

より

$$\frac{a^2+8a-8}{4} < -\frac{a^2-2a+9}{4}$$

$$2a^2 + 6a + 1 < 0$$

$$\therefore \ \underline{\boldsymbol{\frac{-3-\sqrt{7}}{2} < a < \frac{-3+\sqrt{7}}{2}}}$$

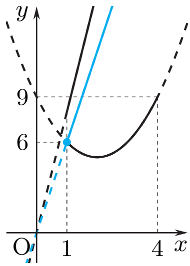
92 $g(x)=x^2-4x+9=(x-2)^2+5$

(1) 直線 $y=f(x)=ax$ が点 $(1,\ 6)$ を通るとき

$$a=6$$

であるから，求める a の値の範囲は

$$\underline{\boldsymbol{a \geqq 6}}$$



(2) 直線 $y=f(x)=ax$ が放物線 $y=g(x)$ と区間 $1 \leqq x \leqq 4$ で接するときを考える。つまり，2 次方程式

$$f(x)=g(x) \text{ すなわち } x^2-(a+4)x+9=0$$

が $1 \leqq x \leqq 4$ の範囲に重解をもつときの a の値を考える。
判別式を D とすると

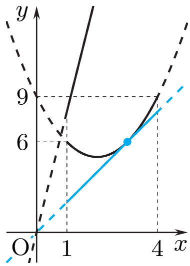
$$D=(a+4)^2-4\cdot 9=a^2+8a-20$$
$$=(a+10)(a-2)$$

$D=0$ をみたすのは

$$a=-10,\ 2$$

このうち，$1 \leqq x \leqq 4$ の範囲に重解 $x=\dfrac{a+4}{2}$ をもつのは $a=2$ のときである。よって，求める a の値の範囲は

$$\underline{\boldsymbol{a \geqq 2}}$$



(3) $1 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最小値を m_f，$g(x)$ の最大値を M_g とおくと

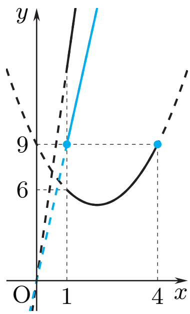
$$m_f \geqq M_g$$

が求める条件である。

$$m_f=f(1)=a, \quad M_g=g(4)=9$$

より

$$\underline{\boldsymbol{a \geqq 9}}$$



(4) $1 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の最大値を M_f，$g(x)$ の最小値を m_g とおくと

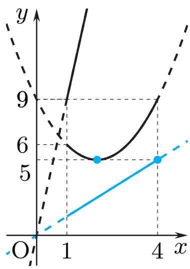
$$M_f \geqq m_g$$

が求める条件である。

$$M_f=f(4)=4a, \quad m_g=g(2)=5$$

より

$$4a \geqq 5 \qquad \therefore\ \underline{\boldsymbol{a \geqq \frac{5}{4}}}$$



2　判別式，解の配置

2.1　判別式

問題

93 (1) 2 次方程式 $x^2+(2-4k)x+k+1=0$ が正の重解をもつとする。このとき，定数 k の値は $k=\boxed{}$ であり，2 次方程式の重解は $x=\boxed{}$ である。（慶應義塾大）

(2) 2 次方程式 $4x^2+kx+3=0$ が実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。（福井工業大）

(3) x についての 2 つの 2 次方程式

$$x^2-ax+a^2+a-1=0$$
$$(a^2+1)x^2-2(a+1)x+1=0$$

がともに 2 つの異なる実数解をもつとき，定数 a の値の範囲は

$\boxed{}<a<\boxed{}$ である。（北海道工業大）

94 x についての 2 次方程式

$$x^2+(2t+k+1)x+(kt+6)=0$$

を考える。

この 2 次方程式が，$-1 \leqq t \leqq 1$ となるすべての t に対して実数解をもつためには，定数 k が $k^2+\boxed{}\,k-\boxed{} \geqq 0$ をみたすこと，すなわち $k \leqq -\boxed{}$ または $\boxed{} \leqq k$ であることが必要十分である。

また，この 2 次方程式が，$-1 \leqq t \leqq 1$ となる少なくとも 1 つの t に対して実数解をもつためには，定数 k が $k^2+\boxed{}\,k-\boxed{} \geqq 0$ をみたすこと，すなわち $k \leqq -\boxed{}$ または $\boxed{} \leqq k$ であることが必要十分である。

チェック・チェック

93 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \fallingdotseq 0)$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

でした。この $\sqrt{\quad}$ の中の $\boldsymbol{b^2-4ac}$ を**判別式**といい，記号 D（Discriminant の頭文字）で表します。

実数解の個数は

$$\begin{cases} D>0 \iff \text{異なる 2 つの実数解をもつ} \\ D=0 \iff \text{1 つの実数解（重解）をもつ} \\ D<0 \iff \text{実数解をもたない（異なる 2 つの虚数解をもつ）} \end{cases}$$

です。

2 次方程式が $ax^2+2b'x+c=0$ のときは

$$D=(2b')^2-4ac=4(b'-ac)$$

より，$\dfrac{D}{4}$ の符号を調べるとよいですね。

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつとき，$D=0$ より，重解 x は

$$x=-\frac{b}{2a}$$

です。したがって，正の重解をもつ条件は

$$\boldsymbol{D=0 \text{ かつ } -\frac{b}{2a}>0}$$

です。

(3) 2 つの 2 次方程式の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，ともに 2 つの実数解をもつ条件は

$$\boldsymbol{D_1>0 \text{ かつ } D_2>0}$$

です。

94 2 次方程式が実数解をもつ $\iff$ $D \geqq 0$

本問は判別式 D が t の関数となります $(D=f(t))$。すると，p.90【**ある範囲でつねに成り立つ 2 次不等式**】の問題となりますね。

解答・解説

93 (1) $x^2+(2-4k)x+k+1=0$ $\cdots\cdots$①

2 次方程式 ① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(1-2k)^2-(k+1)=4k^2-5k=k(4k-5)$$

重解をもつから $D=0$ であり

$$k=0,\ \frac{5}{4}$$

① の重解は

$$x=-(1-2k)=2k-1$$

と表せるから，正の重解となるのは $k>\dfrac{1}{2}$ のときである。

よって，求める k の値は $\underline{\boldsymbol{k=\dfrac{5}{4}}}$ であり，その重解は $\underline{\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}}$ である。

(2) $4x^2+kx+3=0$ の判別式を D とすると実数解をもつ条件は

$$D=k^2-4\cdot4\cdot3=k^2-48\geqq0$$

$$\therefore\quad \underline{\boldsymbol{k\leqq-4\sqrt{3},\ k\geqq4\sqrt{3}}}$$

(3) $\begin{cases} x^2-ax+a^2+a-1=0 \\ (a^2+1)x^2-2(a+1)x+1=0 \end{cases}$

の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とおく。ともに 2 つの異なる実数解をもつ条件は

$$D_1>0 \text{ かつ } D_2>0$$

である。

$$D_1=a^2-4(a^2+a-1)=-(3a-2)(a+2)>0$$

$$\therefore\quad -2<a<\frac{2}{3}$$

$$\frac{D_2}{4}=(a+1)^2-(a^2+1)=2a>0$$

$$\therefore\quad a>0$$

よって

$$\underline{\boldsymbol{0<a<\frac{2}{3}}}$$

94 2 次方程式 $x^2+(2t+k+1)x+(kt+6)=0$ の判別式を D とすると，実数解をもつ条件は

$$D=(2t+k+1)^2-4(kt+6)\geqq 0$$
$$4t^2+4(k+1)t+(k+1)^2-4kt-24\geqq 0$$
$$4t^2+4t+k^2+2k-23\geqq 0$$

ここで，$f(t)=4t^2+4t+k^2+2k-23$ とおくと

$$f(t)=4\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k^2+2k-24$$

$f(t)\geqq 0$ が，$-1\leqq t\leqq 1$ となるすべての t で成り立つ条件は

（$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の最小値）$\geqq 0$

である。

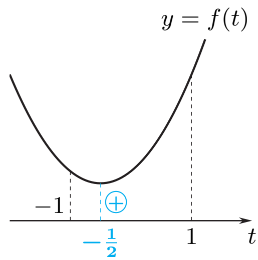
$f(t)$ は $t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小なので，最小値は $k^2+2k-24$ であるから，定数 k が

$$\underline{\boldsymbol{k^2+2k-24\geqq 0}}$$

をみたすこと，すなわち

$$(k+6)(k-4)\geqq 0$$
$$\therefore\ \ \underline{\boldsymbol{k\leqq -6}}\ \text{または}\ \underline{\boldsymbol{4\leqq k}}$$

であることが必要十分である。



また，$-1\leqq t\leqq 1$ となる少なくとも 1 つの t に対して $f(t)\geqq 0$ が成り立つ条件は

（$-1\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の最大値）$\geqq 0$

である。

$y=f(t)$ のグラフは下に凸で，軸 $t=-\dfrac{1}{2}$ より，$f(t)$ は $t=1$ のとき最大で，最大値は

$$f(1)=k^2+2k-15$$

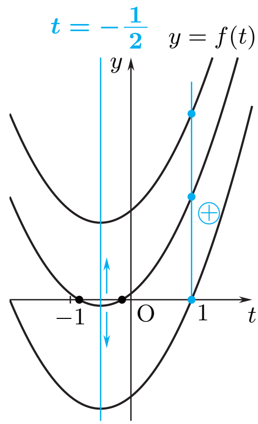
であるから，定数 k が

$$\underline{\boldsymbol{k^2+2k-15\geqq 0}}$$

をみたすこと，すなわち

$$(k+5)(k-3)\geqq 0$$
$$\therefore\ \ \underline{\boldsymbol{k\leqq -5}}\ \text{または}\ \underline{\boldsymbol{3\leqq k}}$$

であることが必要十分である。



2.2　解の配置

問題

95　2 次方程式 $x^2-2(a-1)x+(a-2)^2=0$ について，次の (1)，(2) に答えよ。

(1)　実数解を持つ a の範囲を求めよ。

(2)　2 つの解を α，β としたとき，$0<\alpha<1<\beta<2$ となるような a の範囲を求めよ。（立教大）

96　実数を係数とする 2 次方程式 $x^2-2ax+a+6=0$ が，次の各条件を満たすとき，定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1)　正の解と負の解をもつ。

(2)　異なる 2 つの負の解をもつ。

(3)　すべての解が 1 より大きい。（鳥取大）

97　2 次方程式 $mx^2-x-2=0$ の 2 つの実数解が，それぞれ以下のようになるための m の条件を求めよ。

(1)　2 つの解がともに -1 より大きい。

(2)　1 つの解は 1 より大きく，他の解は 1 より小さい。

(3)　2 つの解の絶対値がともに 1 より小さい。（岐阜大）

チェック・チェック

95 (1) 2 次方程式が実数解をもつための条件は

(判別式) $\geqq 0$

です。

(2) $f(x)=x^2-2(a-1)x+(a-2)^2$ とおき，$x=0,\ 1,\ 2$ における $f(x)$ の符号に着目します。

96 $f(x)=x^2-2ax+a+6$ とおき，$y=f(x)$ のグラフを考えます。着目するのは，一般には

判別式（または，頂点の y 座標），軸の位置，端点の符号

です。

(1) 正負の境目である 0 における $f(0)$ の符号に着目します。

(2)，(3) 「判別式（または，頂点の y 座標），軸の位置，端点の符号」に着目します。

97 グラフを利用して考えますが，x^2 の係数に文字があり，上に凸のグラフと下に凸のグラフの両方を考えなければならないため，このままだと場合分けがメンドウです。そこで，2 次方程式ということから $m \fallingdotseq 0$ ですから，両辺を m でわり

$$f(x)=x^2-\frac{1}{m}x-\frac{2}{m}=0$$

を考えましょう。

なお，計算の途中で分数不等式が現れます。分数不等式 $\dfrac{B}{A}>0$（ただし，$A \fallingdotseq 0$）について，両辺に A^2 $(\geqq 0)$ をかけることで

$$\frac{B}{A}>0 \qquad \therefore \quad AB>0$$

と変形できます。この式変形を用いて分数不等式を解きましょう。

解答・解説

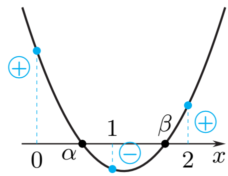
95 (1) 判別式を D として

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a-2)^2=2a-3 \geqq 0 \qquad \therefore\quad \boldsymbol{a \geqq \frac{3}{2}}$$

(2) $f(x)=x^2-2(a-1)x+(a-2)^2$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，求める条件は

$f(0)>0$ かつ $f(1)<0$ かつ $f(2)>0$

である。



$f(0)=(a-2)^2>0$

$\therefore\quad a \fallingdotseq 2$

$f(1)=a^2-6a+7<0$

$\therefore\quad 3-\sqrt{2}<a<3+\sqrt{2}$

$f(2)=a^2-8a+12=(a-2)(a-6)>0$

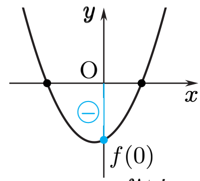
$\therefore\quad a<2,\ a>6$

以上より　$\boldsymbol{3-\sqrt{2}<a<2}$

96 $f(x)=x^2-2ax+a+6$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸であり

$f(x)=(x-a)^2-a^2+a+6$

より，軸は $x=a$，頂点の y 座標は $-a^2+a+6$ である。



(1) 正の解と負の解をもつ条件は

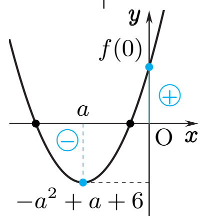
$f(0)=a+6<0$

$\therefore\quad \boldsymbol{a<-6}$

(2) 異なる 2 つの負の解をもつ条件は

$$\begin{cases} -a^2+a+6<0 \\ a<0 \\ f(0)=a+6>0 \end{cases} \text{すなわち} \begin{cases} a<-2,\ 3<a \\ a<0 \\ a>-6 \end{cases}$$

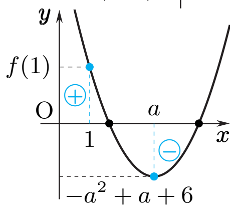
$\therefore\quad \boldsymbol{-6<a<-2}$



(3) すべての解が 1 より大きい条件は

$$\begin{cases} -a^2+a+6 \leqq 0 \\ a>1 \\ f(1)=-a+7>0 \end{cases} \text{すなわち} \begin{cases} a \leqq -2,\ 3 \leqq a \\ a>1 \\ a<7 \end{cases}$$

$\therefore\quad \boldsymbol{3 \leqq a<7}$



97 与えられた方程式は 2 次方程式だから，$m \fallingdotseq 0$ である。実数解をもつ条件は

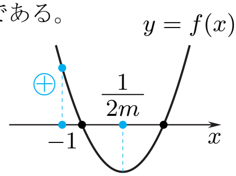
判別式 $D = 1 + 8m \geqq 0$ すなわち $m \geqq -\dfrac{1}{8}$　　$\cdots\cdots$①

また，与えられた 2 次方程式の両辺を $m(\fallingdotseq 0)$ でわると

$$x^2 - \frac{1}{m}x - \frac{2}{m} = 0$$

$f(x) = x^2 - \dfrac{1}{m}x - \dfrac{2}{m}$ とおくと，$y = f(x)$ は下に凸で，軸は $x = \dfrac{1}{2m}$ である。

(1) 求める条件は ① かつ $f(-1) > 0$ かつ　軸：$\dfrac{1}{2m} > -1$ である。



$$f(-1) = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} > 0$$

$$m(m-1) > 0$$

$\therefore\quad m < 0,\ m > 1$　　$\cdots\cdots$②

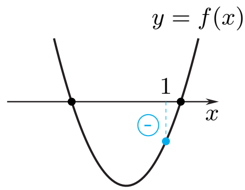
また

$$\frac{1}{2m} > -1 \qquad \frac{1+2m}{2m} > 0 \qquad m(2m+1) > 0$$

$\therefore\quad m < -\dfrac{1}{2},\ m > 0$　　$\cdots\cdots$③

① かつ ② かつ ③ より　　$\underline{\boldsymbol{m > 1}}$

(2) 求める条件は $f(1) < 0$ である。



$$f(1) = 1 - \frac{3}{m} = \frac{m-3}{m} < 0$$

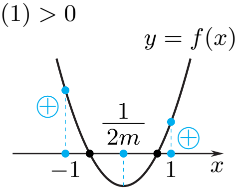
$m(m-3) < 0$　　$\therefore$　$\underline{\boldsymbol{0 < m < 3}}$

(3) 「2 つの解の絶対値がともに 1 より小さい」

$\Longleftrightarrow$ 「2 つの解がともに -1 から 1 の間にある」

$\Longleftrightarrow$ ① かつ (i) $-1 <$ 軸 < 1 かつ (ii) $f(-1) > 0$ かつ $f(1) > 0$

(i) $-1 < \dfrac{1}{2m} < 1$ より



$$\frac{1+2m}{2m} > 0 \text{ かつ } \frac{1-2m}{2m} < 0$$

$$m(2m+1) > 0 \text{ かつ } m(2m-1) > 0$$

「$m < -\dfrac{1}{2}$ または $m > 0$」かつ「$m < 0$ または $m > \dfrac{1}{2}$」

$\therefore\quad m < -\dfrac{1}{2},\ m > \dfrac{1}{2}$　　$\cdots\cdots$④

(ii) $f(-1) > 0$ かつ $f(1) > 0$ より

「$m < 0,\ m > 1$ かつ $m < 0,\ m > 3$」

$\therefore\quad m < 0,\ m > 3$　　$\cdots\cdots$⑤

① かつ ④ かつ ⑤ より　　$\underline{\boldsymbol{m > 3}}$